



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年专注教育行业

—— 考向追踪 ——

答案之书

主 编 肖德好

破题有方，得分有道
从**解题思路**到**标准答案**
“答案之书”让你赢得明明白白

数 学

长江出版传媒

崇文书局

答案之书 使用说明

数学

SHIYONGSHUOMING

本答案之书以《中国高考评价体系》的“一核四层四翼”为核心框架展开深度解析。在系统梳理高考考查逻辑与命题方向的基础上，聚焦“四层”考查内容，突出呈现**必备知识、关键能力与学科素养**。

一、必备知识：落实必备知识，基础一分不落

答案之书中重要知识和重要结论，源自教材或高中阶段总结的核心结论，要求学生重点背诵并熟练掌握，确保考前达到精准调用的程度。

示例 (1) 来自教材的必备知识

重要结论 一、对数的运算法则

1. 运算法则： $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ， $M > 0$ ， $N > 0$

$$(1) \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M$$

(2) 高中阶段总结的必会结论

方法拓展 设 $f(x)$ 的周期为 T ，对 $f(x)$ 的定义域内任一自变量的值 x ，有如下结论：

(1) 若 $f(x+a) = -f(x)$ ($a \neq 0$)，则 $T = 2|a|$ ；

(2) 若 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$ ($a \neq 0$)，则 $T = 2|a|$ ；

二、关键能力：实践多维思考，追求方法突破，高效提能增分

针对不同层次学生的使用策略：

(1) 基础薄弱 主攻：【标准解法】、【教材溯源】、【易错提醒】，确保中低档题目的【标准解法】烂熟于心，步骤分拿全。放弃偏难怪的【巧妙解法】

(2) 中等水平 主攻：【一题多解】、【方法总结】、【重要结论】，提升解题速度和准确性；

(3) 冲刺高分 主攻：【一题多解】中巧妙解法/快解、【知识本源】、【方法拓展】，追求最优解和最快解，深入研究难题的命题背景和思维链条，做到“知其然，更知其所以然”。

示例 (1) 一题多解+教材溯源+易错提醒

15. 【答案】 1

【精析】方法一 定义法

因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以对任意 x ， $f(-x) = f(x)$ 恒成立，即 $(-x)^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 恒成立，即 $-(a \cdot 2^{-x} - 2^x) = a \cdot 2^x - 2^{-x}$ 恒成立，合并同类项得 $a(2^x + 2^{-x}) = 2^x + 2^{-x}$ (此步很多学生被卡住，其实应该合并同类项)，故 $a = 1$ 。

方法二 特值法

因为函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数，所以 $f(1) = f(-1)$ ，即 $(a \cdot 2 - 2^{-1}) = -(a \cdot 2^{-1} - 2)$ ，

合并同类项得 $a(2 + 2^{-1}) = 2 + 2^{-1}$ ，解得 $a = 1$ 。

方法三 秒杀法

因为函数 $y_1 = x^3$ 是奇函数，所以若函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数，只要函数 $y_2 = (a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是奇函数。由 $y = 2^x - 2^{-x}$ 是常见的奇函数，得 $a = 1$ 。

课本溯源 2019 年人教 A 版《数学必修第一册》

第 58 页第 5 题:若 $a, b > 0$, 且 $ab = a + b + 3$, 求 ab 的取值范围.

本题是一个典型的二元条件最值(范围)问题.

方法一:因为 $a, b > 0$, 且 $ab = a + b + 3$, 又 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 则 $ab \geq 2\sqrt{ab} + 3$, 而 $ab > 0$, 解得 $ab \geq 9$, 当且仅当 $a = b = 3$ 时取等号, 故 ab 的取值范围是 $[9, +\infty)$.

易错提醒 过点的切线与在点的切线

“在点的切线”已知切点, 直接求导得斜率; “过点的切线”需先假设切点, 通过方程求解切点坐标后再确定切线方程. 两者核心区别在于切点是否已知, 解题方法也因此不同.

(2) 一题多解+知识本源+方法拓展

知识本源 本题主要考查函数的定义——对应关系.

函数是指对于 A, B 两个非空数集, 集合 A 中的任意一个数 x , 按照某个确定的对应关系 f , 在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应.

方法拓展 常见的奇偶函数:

常见奇函数有: $y = a^x - a^{-x}$, $y = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$, $y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$, $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$, $y = \log_a \frac{x-b}{x+b}$, $y = \log_a (\sqrt{x^2+1} + x)$, $y = \log_a (\sqrt{x^2+1} - x)$, $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{a^x + 1}$, $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{a^x - 1}$, $y = x^{2n+1} (n \in \mathbf{N})$, $y = \sin x$, $y = \tan x$ 等.

三、学科素养：构建知识网络，打通模块壁垒，成就理想高分

学科素养是高考评价体系中“四层”考查内容的核心落脚点，本答案之书严格依据《普通高中数学课程标准（2017年版2025年修订）》要求，将高中数学学科六大核心素养——数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析贯穿其中，引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界。

示例

方法拓展 本题表面看是单纯的函数递推问题，其实在递推与构造部分和斐波那契数列有关. 需要意识到，与本题问题有关的仅有 $f(3), f(4), \dots$ 的取值，而在 $x > 3$ 且 $x \notin \mathbf{N}^*$ 时， $f(x)$ 取值与本题问题毫无关系. 因此，在递推或者构造反例时，均可以不考虑在 $x > 3$ 且 $x \notin \mathbf{N}^*$ 时 $f(x)$ 的取值.

(3) 当 1 个微生物个体繁殖下一代的期望小于或等于 1 时，这种微生物经过多代繁殖后临近灭绝，当 1 个微生物个体繁殖下一代的期望大于 1 时，这种微生物经过多代繁殖后还有继续繁殖的可能.

特别说明

2022-2025年全国卷均参考官方答案，北京、天津、上海试卷已与本省老师核对，仅供参考。

考点 1 集合

1. 【答案】 C

【精析】 依题意得, 集合 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$. 故选 C.

2. 【答案】 B

【精析】 由 $A \subseteq B$, 可得 $0 \in B$. 若 $a - 2 = 0$, 则 $a = 2$, 此时 $A = \{0, -2\}$, $B = \{1, 0, 2\}$, 不满足 $A \subseteq B$; 若 $2a - 2 = 0$, 则 $a = 1$, 此时 $A = \{0, -1\}$, $B = \{1, -1, 0\}$, 满足 $A \subseteq B$. 故选 B.

3. 【答案】 A

【精析】 $\because P = \{1, 2\}, Q = \{2, 3\}, M = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$, $\therefore M = \{1\}$. 故选 A.

4. 【答案】 A

【精析】 由已知可得 $M = \{2, 4, 5\}, 2 \in M$. 故选 A.

5. 【答案】 C

【精析】 易知 T 是 S 的真子集, 所以 $S \cap T = T$, 故选 C.

6. 【答案】 A

题眼 理解集合 M, N 的含义, 其中集合 M 中的元素是比 3 的倍数大 1 的整数, 集合 N 中的元素是比 3 的倍数大 2 的整数.

【精析】 因为整数集 $\mathbf{Z} = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, $U = \mathbf{Z}$, 所以 $\complement_U(M \cup N) = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$. 故选 A.

7. 【答案】 C

【精析】 由 $8 - x \geq x$, 得 $x \leq 4$, 又 $x \in \mathbf{N}^*$, 所以 $A \cap B$ 中有 $(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)$, 共 4 个元素.

8. 【答案】 B

【精析】 因为 $M = \{x | -1 < x < 3\}, N = \{x | x \geq 2\}$, 所以 $M \cup N = \{x | x > -1\} = (-1, +\infty)$.

9. 【答案】 C

【精析】 因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A = \{1, 3, 5\}$, 所以 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, 共有 5 个元素. 故选 C.

10. 【答案】 D

【精析】 $B = \{x | x(x - 1)(x + 1) = 0\} = \{0, -1, 1\}$, 则 $A \cap B = \{0, 1\}$.

11. 【答案】 B

【精析】 因为集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 3, 4\}$, 故选 B.

12. 【答案】 A

【精析】 由 $\sqrt{x} = x$ 得 $x \geq 0$, 两边平方得 $x^2 = x$, 所以 $x = 0$ 或 $x = 1$, 即 $B = \{0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1\}$, 故选 A.

13. 【答案】 B

【精析】 $\because A = [-1, 2), B = \mathbf{Z}, \therefore A \cap B = \{-1, 0,$

$1\}$, 故选 B.

14. 【答案】 B

【精析】 $A \cap B = \{2, 3\}$. 故选 B.

15. 【答案】 B

【精析】 因为 $N = \{x | 2x > 7\} = \{x | x > 3.5\}$, 所以 $M \cap N = \{5, 7, 9\}$.

16. 【答案】 A

【精析】 易知 $0 \in A, -1 \in A, -3 \notin A, 2 \notin A, 3 \notin A$, 则 $A \cap B = \{-1, 0\}$. 故选 A.

17. 【答案】 C

【精析】 因为 $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}, \tan \frac{5\pi}{4} = 1$, 所以 $A = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$, 则 $A \cap B = \{-\frac{1}{2}, 1\}$. 故选 C.

18. 【答案】 A

【精析】 由题意得, $M = \{x | x + 2 \geq 0\} = \{x | x \geq -2\}$, $N = \{x | x - 1 < 0\} = \{x | x < 1\}$, 根据交集的运算可知, $M \cap N = \{x | -2 \leq x < 1\}$. 故选 A.

19. 【答案】 D

【精析】 由集合的交集运算知 $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 2\}$, 故选 D.

20. 【答案】 B

【精析】 在数轴上表示集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}, N = \{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$, 如图, 由图知 $M \cap N = \{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\}$, 故选 B.

21. 【答案】 A

【精析】 $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cap \{x | 0 \leq x < \frac{5}{2}\} = \{0, 1, 2\}$, 故选 A.

22. 【答案】 B

【精析】 因为集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}, B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$, 故选 B.

23. 【答案】 B

【精析】 在数轴上表示出集合 A, B , 易得 $A \cup B = \{x | -1 < x \leq 2\}$.

24. 【答案】 D

【精析】 $\because U = \{x | -3 < x < 3\}, A = \{x | -2 < x \leq 1\}, \therefore \complement_U A = \{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$. 故选 D.

25. 【答案】 D

【精析】 由题意得 $\complement_U A = \{-2, 2\}$, 因为 $B = \{-2, 0, 1\}$, 所以 $(\complement_U A) \cup B = \{-2, 0, 1, 2\}$.

26. 【答案】 D

【精析】 $\because$ 集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\} = \{x | 0 \leq x < 16\}$, 集

合 $N = \{x \mid 3x \geq 1\} = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$, $\therefore M \cap N = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}$, 故选 D.

27. 【答案】C

【精析】因为 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\} = \{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 所以 $M \cap N = \{-2\}$.

28. 【答案】D

【精析】因为 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$, 所以 $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 4, 9\}$, 则 $\complement_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$, 故选 D.

29. 【答案】A

【精析】因为全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{1, 4\}$, 所以 $\complement_U M = \{2, 3, 5\}$, 又 $N = \{2, 5\}$, 所以 $N \cup (\complement_U M) = \{2, 3, 5\}$. 故选 A.

30. 【答案】A

【精析】 $\because M = \{1, 2\}$, $N = \{3, 4\}$, $\therefore M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$, 又 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\therefore \complement_U(M \cup N) = \{5\}$, 故选 A.

31. 【答案】B

【精析】由题意可得 $\complement_U B = \{1, 5, 6\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 6\}$, 故选 B.

32. 【答案】D

【精析】由 $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 得 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, 又全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 所以 $\complement_U(A \cup B) = \{4\}$. 故选 D.

33. 【答案】A

【精析】 $\because U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 2\}$, $\therefore \complement_U B = \{-2, 0, 1\}$, 又 $A = \{0, 1, 2\}$, $\therefore A \cap (\complement_U B) = \{0, 1\}$.

34. 【答案】A

【精析】 $\because U = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, $N = \{0, 1, 6\}$, $\therefore \complement_U N = \{2, 4, 8\}$, 又 $M = \{0, 4, 6\}$, $\therefore M \cup (\complement_U N) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. 故选 A.

35. 【答案】D

【精析】由题意, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$, $A = \{-1, 2\}$, 所以 $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$, 所以 $\complement_U(A \cup B) = \{-2, 0\}$. 故选 D.

36. 【答案】A

【精析】由题意得 $M \cup N = \{x \mid x < 2\}$, 所以 $\{x \mid x \geq 2\} = \complement_U(M \cup N)$, 故选 A.

37. 【答案】 $\{-1, 0\}$

【精析】因为 $A = \{x \mid 2x \leq 1\} = \left\{x \mid x \leq \frac{1}{2}\right\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0\}$.

38. 【答案】C

【精析】设该中学的学生总数为 m , 喜欢足球的学生组成集合 A , 喜欢游泳的学生组成集合 B , 则 $\text{card}(A) = 60\%m$, $\text{card}(B) = 82\%m$, $\text{card}(A \cup B) = 96\%m$, 所以 $\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B) = 46\%m$. 故选 C.

39. 【答案】A

【精析】(1) 当 S 中有 3 个元素时, 设 $S = \{a, b, c\}$

($a < b < c$), 则 $ab, ac, bc \in T$, 且 $ab < ac < bc$, $\therefore \frac{b}{a}$,

$\frac{c}{a}, \frac{c}{b} \in S$, 在 $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$ 中, 显然 $\frac{c}{a}$ 最大, 则有两种情况: ① 当 $\frac{c}{a} = c$ 时, $a = 1$, 若 $\frac{c}{b} = a = 1$, 则 $b = c$, 与 $b <$

c 相矛盾, $\therefore \frac{c}{b} = b$, 则 $c = b^2$, $\therefore b > 1$, $\therefore$ 此时 $S = \{1,$

$b, b^2\}$, $T = \{b, b^2, b^3\}$, $\therefore S \cup T = \{1, b, b^2, b^3\}$, 有 4

个元素, 排除 C; ② 当 $\frac{c}{a} = b$ 时, $c = ab$, 若 $\frac{b}{a} = b$, 则

$a = 1, b = c$, 与 $b < c$ 相矛盾, $\therefore \frac{b}{a} = a$ ($a > 1$), 则 $b =$

$a^2, c = a^3$, 此时 $S = \{a, a^2, a^3\}$, $T = \{a^3, a^4, a^5\}$, 则

$S \cup T = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$, 有 5 个元素, 排除 D.

(2) 当 S 中有 4 个元素时, 由 (1) 分析可知: 若设 $S =$

$\{1, b, b^2, b^3\}$ ($b > 1$), 可得到 $T = \{b, b^2, b^3, b^4, b^5\}$,

$\therefore S \cup T = \{1, b, b^2, b^3, b^4, b^5\}$, 而又由 $b^5 \in T, b \in T$,

得 $b^4 \in S$, 与 $b^4 \notin S$ 相矛盾, 排除 B; 若设 $S = \{a, a^2,$

$a^3, a^4\}$ ($a > 1$), 可得到 $T = \{a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$, 则 $S \cup$

$T = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$, 有 7 个元素. 故选 A.

【命题追踪】集合是考查数学基础性问题的重要载体, 具体命题时, 一般通过简单的一元一次方程、不等式, 一元二次方程、不等式和简单的指数对数不等式来考查集合的运算, 有时也会结合一维的数字或者二维的几何图形考查集合中的元素. 学习时要重视方程思想, 也要重视集合的含义, 集合的含义是解决问题的基础.

考点 2 常用逻辑用语

1. 【答案】A

【精析】 $x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin 0 = 0$, 故“ $x = 0$ ”是“ $\sin 2x = 0$ ”的充分条件; 当 $x = \pi$ 时, $\sin 2x = \sin 2\pi = 0$, 可知 $\sin 2x = 0 \nRightarrow x = 0$, 故“ $x = 0$ ”不是“ $\sin 2x = 0$ ”的必要条件. 综上可知, “ $x = 0$ ”是“ $\sin 2x = 0$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

2. 【答案】C

【精析】当 $a^3 = b^3$ 时, 由幂函数的性质可知 $a = b$, 所以 $3^a = 3^b$, 充分性成立; 反之, 当 $3^a = 3^b$ 时, 由指数函数的性质可知 $a = b$, 所以 $a^3 = b^3$, 必要性成立. 故“ $a^3 = b^3$ ”是“ $3^a = 3^b$ ”的充要条件. 故选 C.

3. 【答案】B

【精析】由 $a^2 = b^2$ 可得 $a = \pm b$, 由 $a^2 + b^2 = 2ab$ 可得 $a = b$, $\therefore$ “ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + b^2 = 2ab$ ”的必要不充分条件.

4. 【答案】A

【精析】由 $x^2 + 3x > 0$, 解得 $x < -3$ 或 $x > 0$, 所以当 $x > 0$ 成立时, $x^2 + 3x > 0$ 一定成立, 当 $x^2 + 3x > 0$ 成立时, $x > 0$ 不一定成立, 所以“ $x > 0$ ”是“ $x^2 + 3x > 0$ ”的充分不必要条件.

5. 【答案】C

【精析】 对于 A, 当 $a \perp b$ 时, $a \cdot b = 0$, 所以 $x \cdot (x+1) + 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -3$, 即必要性不成立, 故 A 错误; 对于 C, 当 $x = 0$ 时, $a = (1, 0)$, $b = (0, 2)$, 故 $a \cdot b = 0$, 所以 $a \perp b$, 即充分性成立, 故 C 正确; 对于 B, 当 $a \parallel b$ 时, $2(x+1) = x^2$, 解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$, 即必要性不成立, 故 B 错误; 对于 D, 当 $x = -1 + \sqrt{3}$ 时, 不满足 $2(x+1) = x^2$, 所以 $a \parallel b$ 不成立, 即充分性不成立, 故 D 错误. 故选 C.

6. 【答案】 B

【精析】 若 $c \perp a$ 且 $c \perp b$, 则 $a \cdot c = b \cdot c = 0$, 此时 a 不一定等于 b , 则充分性不成立; 若 $a = b$, 则 $a \cdot c = b \cdot c$ 显然成立, 则必要性成立. 故“ $a \cdot c = b \cdot c$ ”是“ $a = b$ ”的必要不充分条件, 故选 B.

7. 【答案】 C

【精析】 方法一: 充分性: 因为 $xy \neq 0$, 且 $x + y = 0$, 所以 $x = -y$, 所以 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{-y}{y} + \frac{y}{-y} = -1 - 1 = -2$, 所以充分性成立; 必要性: 因为 $xy \neq 0$, 且 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$, 所以 $x^2 + y^2 = -2xy$, 即 $x^2 + y^2 + 2xy = 0$, 即 $(x+y)^2 = 0$, 所以 $x + y = 0$, 所以必要性成立. 所以“ $x + y = 0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的充要条件.

方法二: 充分性: 因为 $xy \neq 0$, 且 $x + y = 0$, 所以 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{-2xy}{xy} = -2$, 所以充分性成立;

必要性: 因为 $xy \neq 0$, 且 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$, 所以 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy} - 2 = -2$, 所以 $\frac{(x+y)^2}{xy} = 0$, 所以 $(x+y)^2 = 0$, 所以 $x + y = 0$, 所以必要性成立. 所以“ $x + y = 0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的充要条件. 故选 C.

8. 【答案】 B

【精析】 由 $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 = 0$, 得 $a^2 = b^2$, 即 $|a| = |b|$, 可知 $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ 等价于 $|a| = |b|$. 若 $a = b$ 或 $a = -b$, 则 $|a| = |b|$, 即 $(a+b) \cdot (a-b) = 0$, 可知必要性成立; 若 $(a+b) \cdot (a-b) = 0$, 则 $|a| = |b|$, 无法推出 $a = b$ 或 $a = -b$, 例如 $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$, 满足 $|a| = |b|$, 但 $a \neq b$ 且 $a \neq -b$, 可知充分性不成立. 综上所述, “ $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ ”是“ $a = b$ 或 $a = -b$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

9. 【答案】 B

【精析】 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$ 时, $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ 成立, 但 $\sin \alpha + \cos \beta \neq 0$, 故 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ 推不出 $\sin \alpha + \cos \beta = 0$; 当 $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ 时, $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta =$

$(-\cos \beta)^2 + \sin^2 \beta = 1$, 即 $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ 能推出 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$. 综上可知, 甲是乙的必要条件但不是充分条件. 故选 B.

10. 【答案】 C

【精析】 设 $z = x + yi$, $\omega = a + bi$, $x, y \in \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $z - \omega = (x - a) + (y - b)i$, $\overline{z - \omega} = (x - a) + (y - b)i$, 因为 z 和 ω 伴随, 所以 $y - b = 0$ 或 $y + b = 0$. 又 $(\omega - i) - (z + i) = (a - x) + (b - y - 2)i$, $(\omega - i) - \overline{z + i} = (a - x) + (b + y)i$, 所以若 $\omega - i$ 和 $z + i$ 伴随, 则 $b - y - 2 = 0$ 或 $b + y = 0$, 所以“ $\omega - i$ 和 $z + i$ 伴随”的充要条件是 $b + y = 0$, 即 $\text{Im } \omega + \text{Im } z = 0$.

11. 【答案】 C

【精析】 充分性: 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 可得 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 则 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{(n-1)}{2}d$, 所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为首项为 a_1 , 公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列, 即甲是乙的充分条件.

必要性: 若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 可设 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 m , 则 $\frac{S_n}{n} = S_1 + (n-1)m$, 故 $S_n = na_1 + n(n-1)m$, 利用公式 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1, \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2, \end{cases}$ 可得 $a_n = a_1 + 2(n-1)m$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2m$, 即 $\{a_n\}$ 为公差为 $2m$ 的等差数列, 所以甲是乙的必要条件. 综上, 甲是乙的充要条件. 故选 C.

12. 【答案】 B

【精析】 若 $q = 1$, 则 $S_n = na_1$, 当 $a_1 > 0$ 时, $\{S_n\}$ 为递增数列, 当 $a_1 < 0$ 时, $\{S_n\}$ 为递减数列, $\therefore$ 甲 $\nRightarrow$ 乙. 若 $\{S_n\}$ 为递增数列, 则 $S_n - S_{n-1} = a_n = a_1 q^{n-1} > 0 (n \geq 2)$, $\therefore a_1 > 0, q > 0$, $\therefore$ 乙 $\Rightarrow$ 甲. 故甲是乙的必要条件但不是充分条件, 故选 B.

13. 【答案】 C

【精析】 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} > a_n$, 公差 $d = a_{n+1} - a_n > 0$, 令 $a_n = a_1 + (n-1)d > 0$, 解得 $n > 1 - \frac{a_1}{d}$, $\left[1 - \frac{a_1}{d}\right]$ 表示不大于 $1 - \frac{a_1}{d}$ 的最大整数, 所以存在正整数 $N_0 = \left[1 - \frac{a_1}{d}\right]$, 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$, 充分性成立; 若存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$, $\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$, $\therefore \forall n > N_0, n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $d > \frac{d - a_1}{n}$ 成立, $\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d - a_1}{n} = 0$, 且 $d \neq 0$, $\therefore d > 0$, $\therefore \forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+1} - a_n = d > 0$, 即 $a_{n+1} > a_n$, 即 $\{a_n\}$ 为递增数列, $\therefore$ 必要性成立. 综上, “ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”的充要条件, 故选 C.

14. 【答案】 C

【精析】 由题意知向量 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ 共面, 即这三个向量不能构成空间的一个基底. 对于 A, 由空间直

角坐标系易知 $(0,0,0), (1,0,0), (0,0,1)$ 三个向量共面,则当 $(0,0,0), (1,0,0) \in \Omega$ 时,无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$,故 A 错误;对于 B,由空间直角坐标系易知 $(-1,0,0), (1,0,0), (0,0,1)$ 三个向量共面,则当 $(-1,0,0), (1,0,0) \in \Omega$ 时,无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$,故 B 错误;对于 C,由空间直角坐标系易知 $(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)$ 三个向量不共面,可构成空间的一个基底,则由 $(1,0,0), (0,1,0) \in \Omega$ 能推出 $(0,0,1) \notin \Omega$,故 C 正确;对于 D,由空间直角坐标系易知 $(1,0,0), (0,0,1), (0,0,-1)$ 三个向量共面,则当 $(0,0,-1), (1,0,0) \in \Omega$ 时,无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$,故 D 错误. 故选 C.

15. 【答案】 C

【精析】存在量词命题的否定是全称量词命题,即把存在量词改为全称量词,并把结论给予否定,故选 C.

16. 【答案】 B

【精析】当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $\left| -\frac{1}{2} + 1 \right| = \frac{1}{2} < 1$,故 p 是假命题,则 $\neg p$ 是真命题;当 $x = 1$ 时, $1^3 = 1$,故 q 是真命题,则 $\neg q$ 是假命题. 故选 B.

17. 【答案】 B

【精析】当 $k = 4$ 时, $(x-4)^2 + (y-16)^2 = 16$,当 $k = 5$ 时, $(x-5)^2 + (y-25)^2 = 20$,两圆的根轴的方程为 $x + 9y - 187 = 0$,两圆的连心线所在直线的方程为 $9x - y - 20 = 0$,联立方程组求得交点的纵坐标为 $\frac{1663}{82}$,取直线 $l: y = \frac{1663}{82}$,圆心 (k, k^2) 到直线 l 的距离为 $\left| k^2 - \frac{1663}{82} \right|$,当 $|k| \geq 5$ 时, $\left| k^2 - \frac{1663}{82} \right| - \sqrt{4|k|} = k^2 - \frac{1663}{82} - 2\sqrt{|k|} = \left(|k| - \frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1663}{82} \right) + \frac{2\sqrt{5}\sqrt{|k|}}{5} (\sqrt{|k|} - \sqrt{5}) > 0$,当 $|k| = 0, 1, 2, 3, 4$ 时, $\left| k^2 - \frac{1663}{82} \right| - \sqrt{4|k|} = \frac{1663}{82} - k^2 - 2\sqrt{|k|} > 0$, $\therefore$ 直线 $l: y = \frac{1663}{82}$ 与它上、下方的所有圆都相离,故①成立;设任一直线 l 的方程为 $Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$,圆心 (k, k^2) 到直线 l 的距离为 $\frac{|Ak + Bk^2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,对于任意给定的实数 $A, B, C (A^2 + B^2 \neq 0)$,总能找到正整数 k_0 ,当 $|k| > k_0$ 时,都有 $\frac{|Ak + Bk^2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} > 4\sqrt{|k|}$ 成立,即直线 l 只与有限个圆相交,与无数个圆相离,故②不成立. 故选 B.

18. 【答案】 B

【精析】方法一 定性分析

$\because$ 椭圆是封闭的, $\therefore$ 总可以找到满足题意的 M 点,使得 $|MP| \cdot |MQ| = 1$ 成立,故①是真命题. 在双曲线 C 中,假设 C 为“自相关曲线”,显然 $M \notin C$,否则存在与点 M 重合的点 P ,此时 $|PM| = 0$. 若 $|PM|_{\max} \rightarrow +\infty$,而 $|QM|_{\min}$ 是个固定值,则无法对任意的 $P \in C$,都存在 $Q \in C$,使得 $|PM| \cdot |QM| = 1$,故②是假命题.

题,故选 B.

方法二 定理计算+分析

首先确定 M 的位置(找到一个就行),再证明“对任意点 $P \in \Gamma$,都有 $Q \in \Gamma$,使得 $|MP| \cdot |MQ| = 1$ ”.

若 M 在曲线上,则存在点 P 与 M 重合,此时 $|PM| = 0$,故点 M 不在曲线上.

①对任意椭圆 T ,不妨将椭圆方程化为标准形式:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,设其左、右顶点分别为 A_1, A_2 ,取点 $M(m, 0)$,其中 $m = \sqrt{a^2 + 1}$,设点 $P(x, y)$,则 $|PM|^2 = (x - m)^2 + y^2 = (x - m)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2mx + m^2 + b^2$,记 $f(x) = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2mx + m^2 + b^2, x \in [-a, a]$.

$f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = \frac{ma^2}{c^2}$,且 $\frac{ma^2}{c^2} > m > a$,所以 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上单调递减,所以 $|PM|_{\min} = |A_2M| = \sqrt{a^2 + 1} - a, |PM|_{\max} = |A_1M| = \sqrt{a^2 + 1} + a$,所以 $|PM| \in [\sqrt{a^2 + 1} - a, \sqrt{a^2 + 1} + a]$. 因为 $(\sqrt{a^2 + 1} - a)(\sqrt{a^2 + 1} + a) = 1$,所以对于任意的 $P \in T$,都存在 $Q \in T$,使得 $|PM| \cdot |QM| = 1$,因此任意椭圆都是“自相关曲线”,①是真命题.

②对于某个给定的双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,假设其为“自相关曲线”,对于定点 $M \notin C, |PM|$ 必然存在最小值,不妨设最小值为 d ,而双曲线上的点的横、纵坐标均可趋近于无穷大,因此 $|PM| \in [d, +\infty)$. 若取 $|PM| > \frac{1}{d}$,则 $|QM| = \frac{1}{|PM|} < d$,矛盾,故假设不成立,因此不存在双曲线是“自相关曲线”,②是假命题. 故选 B.

【命题追踪】常用逻辑用语在新高考中几乎是必考点,以充要条件、量词为载体,结合函数、数列、立体几何、平面向量等知识进行考查,更重视对学科重点概念和关系的考查. 要关注含量词命题的否定结构的标记和符号变化.

考点 3 不等式

1. 【答案】 C

【精析】由 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$,得 $\frac{x-4}{x-1} - 2 \geq 0$,即 $\frac{-x-2}{x-1} \geq 0$,可得 $-(x+2)(x-1) \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$,所以 $-2 \leq x < 1$,故不等式 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 的解集为 $\{x | -2 \leq x < 1\}$.

2. 【答案】 (1,3)

【精析】不等式 $\frac{x-1}{x-3} < 0$ 等价于 $(x-1)(x-3) < 0$,解得 $1 < x < 3$,所以不等式的解集是 $(1,3)$.

3. 【答案】 $\{x | -1 < x < 3\}$

【精析】 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 可化为 $(x-3)(x+1) < 0$,解

得 $-1 < x < 3$, 故不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 3\}$.

4. 【答案】 (1,3)

【精析】 由 $|x-2| < 1$, 可得 $-1 < x-2 < 1$, 解得 $1 < x < 3$, 故不等式的解集为 $(1,3)$.

5. 【答案】 -4

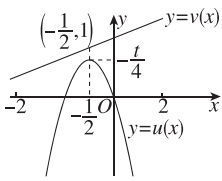
【精析】 方法一 必要性探路+充分性证明

因为 $(2a+b)x^2+bx-a-1 \leq 0$, 所以 $(x^2-\frac{1}{2})2a+(x^2+x)b-1 \leq 0$ ①. 令 $x^2-\frac{1}{2}=x^2+x$, 得 $x=-\frac{1}{2}$, 代入①式, 得 $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}b \leq 1$, 得 $2a+b \geq -4$, 故 $2a+b$ 的最小值为 -4 .

下证 $2a+b=-4$ 时符合题意: 当 $2a+b=-4$ 时, $(2a+b)x^2+bx-a-1=-4x^2-(2a+4)x-a-1=-(2x+a+1)(2x+1)$, 取 $a=0, b=-4$, 上式 $=(2x+1)^2 \leq 0$, 符合题意. 故 $(2a+b)_{\min}=-4$.

方法二 分离函数+数形结合

令 $t=2a+b$, 则 $tx^2+(t-2a)x-a-1 \leq 0$, 即 $tx^2+tx \leq 2ax+a+1$, 设 $u(x)=tx^2+tx, v(x)=2ax+a+1$, 考虑 $t < 0$, 则 $y=v(x), y=u(x)$ 的图象如图所示.



易知 $v(x)$ 的图象过定点 $(-\frac{1}{2}, 1)$, 若存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得对任意 $x \in [-2, 2]$, $u(x) \leq v(x)$, 则 $-\frac{t}{4} \leq 1$, 得 $t \geq -4$, 故 $2a+b$ 的最小值为 -4 .

方法拓展 解决恒成立的双参数问题, 一般用必要性分析法. 对于本题, 利用 $2a+b$ 的特点, 配成 $\lambda a + \mu b$ 的形式, 使得系数比满足 $2:1$, 求出 x 的值再求出 $2a+b$ 的最小值.

6. 【答案】 C

【精析】 对于 A, 当 $a=b$ 时, $a^2+b^2=2ab$, 故 A 错误; 对于 B, D, 取 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$, 此时 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2+4=6 <$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = 8 = \frac{1}{ab}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 + 4 = 6 > \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}} =$$

$4\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, 故 B, D 错误; 对于 C, 由基本不等式可得 $a+b \geq 2\sqrt{ab} > \sqrt{ab}$, 故 C 正确. 故选 C.

7. 【答案】 A

【精析】 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号, 又 $a > b > 0$, 所以 $a+b > 2\sqrt{ab}$, 故 A 正确, B 错误; $\frac{a}{2}+2b \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \times 2b} = 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $\frac{a}{2}=2b$, 即 $a=4b$ 时取等号, 故 C, D 错误. 故选 A.

8. 【答案】 C

【精析】 对于 A, $y=(x+1)^2+3 \geq 3$, 最小值为 3, 不符

合条件; 对于 B, 令 $|\sin x|=t$, 则 $t \in (0, 1]$, $y=t+\frac{4}{t}$

在 $(0, 1]$ 上单调递减, 故 $y=t+\frac{4}{t} \geq 1+\frac{4}{1}=5$, 即 $y=$

$|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$ 的最小值为 5, 不符合条件; 对于 C,

$y=2^x+2^{2-x} \geq 4$, 当且仅当 $x=1$ 时等号成立, 符合条件;

对于 D, $y=\ln x+\frac{4}{\ln x}$ 没有最小值, 不符合条件. 故选 C.

知识本源 题目以二次函数、三角函数、指数函数、对数函数求最值为表象, 结合考查识别基本不等式结构, 利用基本不等式解答.

9. 【答案】 C

【精析】 由题意, α, β, γ 都是锐角, 则其三角函数值均为正数, 所以 $0 < \sin \alpha \cos \beta \leq \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta}{2}$ ①, 当且仅当

$\sin \alpha = \cos \beta$ 时取等号, 同理得 $0 < \sin \beta \cos \gamma \leq \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \gamma}{2}$ ②, 当且仅当 $\sin \beta = \cos \gamma$ 时取等号, $0 <$

$\sin \gamma \cos \alpha \leq \frac{\sin^2 \gamma + \cos^2 \alpha}{2}$ ③, 当且仅当 $\sin \gamma = \cos \alpha$ 时

取等号, 由①+②+③得 $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha < \frac{3}{2}$, 故 $\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma \cos \alpha$ 三

个值不可能都大于 $\frac{1}{2}$. 当 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{4}$ 时,

$$\sin \beta \cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}, \sin \gamma \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}, \text{故大于 } \frac{1}{2} \text{ 的个数的最大值是 2, 故选 C.}$$

10. 【答案】 B

【精析】 方法一(展开+基本不等式): $(x+\frac{1}{x})(x+\frac{4}{x}) = x^2 + \frac{4}{x^2} + 5 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} + 5 = 9$, 当且仅当

$$x^2 = \frac{4}{x^2}, \text{即 } x = \pm \sqrt{2} \text{ 时, 等号成立, 所以 } (x + \frac{1}{x})(x + \frac{4}{x}) \text{ 的最小值为 9.}$$

方法二(换元法): $(x+\frac{1}{x})(x+\frac{4}{x}) = x^2 + \frac{4}{x^2} + 5$, 令

$$t = x^2 > 0, \text{则原式} = t + \frac{4}{t} + 5. \text{易知函数 } g(t) = t + \frac{4}{t} (t > 0) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上单调递减, 在 } (2, +\infty) \text{ 上单调递}$$

增, 所以 $g(t)$ 在 $t=2$ 处取得最小值 4, 故 $(x + \frac{1}{x})(x + \frac{4}{x})$ 的最小值为 9.

方法三(基本不等式): $(x+\frac{1}{x})(x+\frac{4}{x}) = x^2 + \frac{4}{x^2} + 5 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} + 5 = 9$, 当且仅当 $x^2 = \frac{4}{x^2}$, 即 $x = \pm \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 所以 $(x + \frac{1}{x})(x + \frac{4}{x})$ 的最小值为 9.

方法四(换元法): $(x+\frac{1}{x})(x+\frac{4}{x}) = x^2 + \frac{4}{x^2} + 5$, 令 $t = x^2 > 0$, 则原式 $= t + \frac{4}{t} + 5$. 易知函数 $g(t) = t + \frac{4}{t}$ ($t > 0$) 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递

增, 所以 $g(t)$ 在 $t=2$ 处取得最小值 4, 故 $(x + \frac{1}{x})(x + \frac{4}{x})$ 的最小值为 9.

方法五(基本不等式): $(x+\frac{1}{x})(x+\frac{4}{x}) = x^2 + \frac{4}{x^2} + 5 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} + 5 = 9$, 当且仅当 $x^2 = \frac{4}{x^2}$, 即 $x = \pm \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 所以 $(x + \frac{1}{x})(x + \frac{4}{x})$ 的最小值为 9.

11. 【答案】 ABD

【精析】 对于 A, 因为 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅

当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 所以 $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$, 故 **A 正确**; 对于 B, 因为 $a>0, b>0$, 且 $a+b=1$, 所以 $a-b=2a-1>-1$, 所以 $2^{a-b}>2^{-1}=\frac{1}{2}$, 故 **B 正确**; 对于 C, $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) \leq \log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 **C 不正确**; 因为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = 1+2\sqrt{ab} \leq 1+a+b=2$, 所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 **D 正确**. 故选 ABD.

12. 【答案】BD

【精析】方法一 利用基本不等式

由 $x^2+y^2-xy=1$, 得 $(x+y)^2-1=3xy \leq 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, 当且仅当 $x=y=\pm 1$ 时取等号, 所以 $(x+y)^2 \leq 4$, 即 $-2 \leq x+y \leq 2$, 故 **A 错误, B 正确**; 因为 $-\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, 所以 $-\frac{x^2+y^2}{2} \leq x^2+y^2-1 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, 所以 $\frac{2}{3} \leq x^2+y^2 \leq 2$, 故 **C 错误, D 正确**. 故选 BD.

方法二 三角换元, 化归转化

由 $x^2+y^2-xy=1$ 得 $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = 1$, 令 $\begin{cases} x-\frac{y}{2} = \cos \theta, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sin \theta, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta + \cos \theta, \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \theta, \end{cases}$ 故 $x+y = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \in [-2, 2]$, 故 **A 错误, B 正确**; $x^2+y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta + \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \theta\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \cos 2\theta + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{4}{3} \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$, 故 **C 错误, D 正确**. 故选 BD.

方法三 和差换元, 利用椭圆的几何性质

令 $x=u+v, y=u-v$, 由题设得 $u^2+3v^2=1$, 由椭圆的几何意义知, $u \in [-1, 1], v \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 所以 $x+y=2u$ 的取值范围为 $[-2, 2]$, $x^2+y^2=2(u^2+v^2)$ 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$, 故 **选项 B 和 D 正确**, **选项 A 和 C 错误**. 故选 BD.

方法四 权方和不等式

由权方和不等式及基本不等式得 $1=x^2+y^2-xy \geq \frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4}$, 解得 $-2 \leq x+y \leq 2$, 当且仅当 $x=y$ 时, 取等号, 故 **A 错误, B 正确**; 同时,

$1=x^2+y^2-xy \geq x^2+y^2 - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2}$, 故 $x^2+y^2 \leq 2$, 当且仅当 $x=y$ 时, 取等号, 故 **C 错误, D 正确**. 故选 BD.

教材溯源 人教 A 版必修第一册第 58 页第 5 题: 若 $a, b>0$, 且 $ab=a+b+3$, 求 ab 的取值范围.

本题是一个典型的二元条件最值(范围)问题.

精解: 方法一: 因为 $a, b>0$, 且 $ab=a+b+3$, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $ab \geq 2\sqrt{ab}+3$, 又 $ab>0$, 所以 $ab \geq 9$, 当且仅当 $a=b=3$ 时取等号, 故 ab 的取值范围是 $[9, +\infty)$.

方法二: 设 $a+b=t (t>0)$, 则 $b=t-a$, 代入 $ab=a+b+3$, 化简得 $a^2-ta+t+3=0$, 又 $a>0$, 所以 $\begin{cases} t^2-4t-12 \geq 0, \\ t>0, \\ t+3>0, \end{cases}$ 解得 $t \geq 6$, 即 $ab=a+b+3 \geq 9$, 故 ab 的取值范围是 $[9, +\infty)$.

13. 【答案】4

【精析】方法一: 易知 $b+\frac{1}{a} = \left(b+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2 \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} + 2 = 4$, 当且仅当 $ab=1$, 即 $a=\frac{1}{2}, b=2$ 时取等号.

方法二: 由已知, 令 $m=\frac{1}{b}$, 可得 $a>0, m>0, a+m=1, b+\frac{1}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{m} = (a+m)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{m}\right) = 2 + \frac{m}{a} + \frac{a}{m} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{m}{a} \times \frac{a}{m}} = 4$, 当且仅当 $\frac{m}{a} = \frac{a}{m}$, 即 $a=m=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

方法三(权方和不等式): $b+\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{b}} + \frac{1}{a} \geq \frac{(1+1)^2}{\frac{1}{b}+a} = 4$, 当且仅当 $a=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 所以 $b+\frac{1}{a}$ 的最小值为 4.

14. 【答案】 $2\sqrt{2}$

【精析】方法一 四元均值不等式

$\therefore \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$, $\therefore \frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b = \frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{a}{b^2} = \frac{b}{2}$, 即 $a=b=\sqrt{2}$ 时, 等号成立, 则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

方法二 多次用基本不等式,先让 b 静止,再让 b 运动

$\because a > 0, b > 0, \therefore \frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{a}{b^2}} + b = \frac{2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{2}{b} \times b} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{a}{b^2}$ 和 $\frac{2}{b} = b$ 同时成立, 即 $a = b = \sqrt{2}$ 时, 两等号同时成立.

[命题追踪] 不等式的解法与基本不等式在高考中较少单独考到, 一般结合集合或其他知识作为工具考查. 基本不等式的本质是结构的识别, 因此对于基本不等式要重视对结构的本质把握和等价变形的多样性.

常用技巧 a, b, x, y 均为正数.

1. 基本不等式链: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$

2. 热点不等式: $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab};$

3. 权方和不等式: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y};$

4. 均值不等式: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$

主题二 函数、导数及其应用

考点 4 函数的概念及其表示

1. [答案] D

[精析] $y = 10^{\lg x} = x$, 定义域与值域均为 $(0, +\infty)$, 只有选项 D 满足题意.

2. [答案] A

[精析] 若函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则对任意 $M \in \mathbf{R}$, 一定存在 $x_1 \in D$, 使得 $f(x_1) = |M| + 1$, 取 $x_0 = x_1$, 则 $|f(x_0)| = |M| + 1 > M$, 充分性成立; 取 $f(x) = 2^x$, $D = \mathbf{R}$, 则对任意 $M \in \mathbf{R}$, 一定存在 $x_1 \in D$, 使得 $f(x_1) = |M| + 1$, 取 $x_0 = x_1$, 则 $|f(x_0)| = |M| + 1 > M$, 但此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$, 必要性不成立. 所以“函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ”是“对任意 $M \in \mathbf{R}$, 存在 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

3. [答案] D

[精析] 对选项 A 中的函数, 当 $x = 0$ 时, 得 $f(0) = 0$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 得 $f(0) = 1$, 矛盾; 选项 B 中的函数, 当 $x = 0$ 时, 得 $f(0) = 0$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 得 $f(0) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$, 矛盾; 选项 C 中的函数, 当 $x = -1$ 时, 得 $f(2) = 0$, 当 $x = 1$ 时, 得 $f(2) = 2$, 矛盾; 选项 D 中的函数变形为 $f((x+1)^2 - 1) = \sqrt{(x+1)^2 - 1 + 1}$, 令 $t = (x+1)^2 - 1$ 可知, $f(t) = \sqrt{t+1}$ 满足要求.

知识本源 本题主要考查函数的定义——对应关系. 函数是指对于 A, B 两个非空数集, 集合 A 中的任意一个数 x , 按照某个确定的对应关系 f , 在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应.

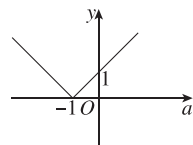
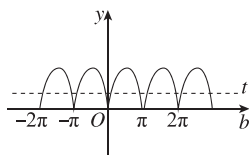
4. [答案] B

[精析] **方法一:** 实数 a, b, t 满足 $|a+1| = t, |\sin b| = t, \therefore (a+1)^2 = t^2, a^2 + 2a = t^2 - 1, \sin^2 b = t^2$, 若 t 确定, 则 $t^2, t^2 - 1$ 为定值, 由三角函数的性质知, 当 t^2 确定时, b 不确定, $\therefore b^2, \sin \frac{b}{2}$ 不确定, **A, C 不正确**,

$\because t^2 - 1$ 确定, $\therefore a^2 + 2a$ 确定, $\therefore$ 若 t 确定, 则 $a^2 + 2a$ 唯一确定, $a^2 + a$ 不唯一确定, **B 正确, D 不正确**. 故选 B.

方法二: 画出函数 $y_1 = |\sin b|, y_2 = |a+1|$ 的图象, 如图, 观察函数图象知, 当 t 确定时, 对于函数 $y_1 = |\sin b|, b$ 不确定, b^2 不唯一确定, $\sin \frac{b}{2}$ 不唯一确定,

A, C 不正确. 当 t 确定时, 函数 $y_2 = |a+1|$ 中 a 不唯一确定, 但 $|a+1|$ 唯一确定, 故 $a^2 + 2a = |a+1|^2 - 1$ 唯一确定, $a^2 + a$ 不唯一确定, **B 正确, D 不正确**. 故选 B.



5. [答案] $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

[精析] 要使函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 有意义, 需满足 $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

6. [答案] $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right)$

题眼 题目主要有 2 个条件: (1) $f(x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 表示函数 $f(x)$ 在 x 处的取值与其在 $\frac{1}{x+1}$ 处的取值相同; (2) 集合 $\{y | y = f(x), x \in [0, a]\}$ 可取得 A 中所有值表示函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上的取值范围与它的值域相同.

[精析] **方法一** 分拆定义域+转化问题

$D = [0, a] \cup [a, +\infty)$, $\therefore \{y | y = f(x), x \in [0, a]\} = A, \therefore \left\{y \mid y = f\left(\frac{1}{1+x}\right), x \in [a, +\infty)\right\} \subseteq A$, 又 $f(x) = f\left(\frac{1}{1+x}\right)$, 当 $x \in [a, +\infty)$ 时, $\frac{1}{1+x} \in (0,$

$\frac{1}{1+a}]$, $\therefore f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的取值范围与 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{1+a}]$ 上的取值范围相同, $\therefore f(x)$ 在 $[0, a] \cup (0, \frac{1}{1+a}]$ 上的取值范围与值域 A 相同, $\therefore a \geq \frac{1}{1+a}$, 又 $a > 0$, 解得 $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\therefore a$ 的取值范围为 $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$.

方法二 数形结合

$\therefore f(x) = f(\frac{1}{1+x})$, $\{y | y = f(x), x \in [0, a]\} = A$, $\therefore$ 只需要 $x, \frac{1}{1+x}$ 中有一个在 $[0, a]$ 中即可, 即 $x \leq a$ 或 $\frac{1}{1+x} \leq a$, $\therefore a \geq \min\{x, \frac{1}{1+x}\}$, 设 $h(x) = \min\{x, \frac{1}{1+x}\}$, $\therefore a \geq [h(x)]_{\max}$, 作出 $h(x)$ 的图象, 如图中实线部分. 由图象得 $[h(x)]_{\max}$ 即为点 A 的纵坐标 (点 A 为 $h(x)$ 图象的最高点), 由 $\begin{cases} y=x, \\ y=\frac{1}{1+x}, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \end{cases} \therefore A(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $\therefore [h(x)]_{\max} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\therefore a \in [\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$.

7. 【答案】D

【精析】 当 $x > 0$ 时, $x \operatorname{sgn} x = x = |x|$; 当 $x = 0$ 时, $x \operatorname{sgn} x = 0 = |x|$; 当 $x < 0$ 时, $x \operatorname{sgn} x = -x = |x|$. 综上, $|x| = x \operatorname{sgn} x$. 故选 D.

8. 【答案】D

【精析】 $f(x)$ 的图象如图所示. 当 $\begin{cases} x+1 \leq 0, \\ 2x \leq 0, \end{cases}$ 即 $x \leq -1$ 时, 若满足 $f(x+1) < f(2x)$, 则满足 $x+1 > 2x$, 即 $x < 1$, 此时 $x \leq -1$; 当 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ 2x < 0, \end{cases}$ 即 $-1 < x < 0$ 时, $f(x+1) < f(2x)$ 恒成立. 综上, x 的取值范围是 $x < 0$. 故选 D.

9. 【答案】 $\sqrt{3}$

【精析】 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(3) = \sqrt{3}$.

10. 【答案】2

【精析】 因为 $f(\sqrt{6}) = 6 - 4 = 2$, 所以 $f[f(\sqrt{6})] = f(2) = 3$, 即 $|2-3| + a = 3$, 解得 $a = 2$.

11. 【答案】 $\frac{37}{28}$ $3+\sqrt{3}$

【精析】 $f[f(\frac{1}{2})] = f(\frac{7}{4}) = \frac{7}{4} + \frac{4}{7} - 1 = \frac{37}{28}$. 当

$f(x) = x + \frac{1}{x} - 1 = 3$ 时,

$x = 2 + \sqrt{3}$, 作出 $f(x)$ 的图

象如图所示, 由图可知, 当 $1 \leq f(x) \leq 3$ 时, $-1 \leq a \leq 1$,

$b = 2 + \sqrt{3}$, 则 $b-a$ 的最大值为 $3 + \sqrt{3}$.

12. 【答案】 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$

【精析】方法一 数形结合法

$\therefore f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$

$\therefore f(x - \frac{1}{2}) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 2^{x-\frac{1}{2}}, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

$f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$, 即 $f(x - \frac{1}{2}) > 1 - f(x)$. 画出 $y = f(x - \frac{1}{2})$ 与 $y = 1 - f(x)$ 的图象如图所示. 由图可知, 满足 $f(x - \frac{1}{2}) > 1 - f(x)$ 的解集为 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$.

方法二 分类讨论法

令 $g(x) = f(x) + f(x - \frac{1}{2})$, 注意到 $x > x - \frac{1}{2}$, 下面对 $x, x - \frac{1}{2}$ 与 0 的大小关系分三种情形讨论. 当 $x \leq 0$ 时, $g(x) = f(x) + f(x - \frac{1}{2}) = 2x + \frac{3}{2}$; 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = f(x) + f(x - \frac{1}{2}) = 2^x + x + \frac{1}{2}$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = f(x) + f(x - \frac{1}{2}) = (\sqrt{2} + 2)2^{x-1}$. 所以 $g(x) = f(x) + f(x - \frac{1}{2}) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}, & x \leq 0, \\ 2^x + x + \frac{1}{2}, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ (\sqrt{2} + 2) \cdot 2^{x-1}, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$ 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$, $(0, \frac{1}{2}]$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上均单调递增, 且 $g(-\frac{1}{4}) = 1, 2^0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1, (\sqrt{2} + 2) \times 2^{\frac{1}{2}-1} = 1 + \sqrt{2} > 1$, 所以满足 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 的 x 的取值范围是 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$.

方法总结 解分段函数不等式的基本方法如下:

(1) 分类讨论法: 根据分段函数的定义域划分区间, 对每个区间分别求解不等式, 最后取并集.

(2)利用函数单调性:若函数在各段内单调,可通过单调性将不等式转化为关于 x 的简单不等式.
(3)数形结合法:画出分段函数的图象,通过观察图象的交点、增减性等直观求解不等式.

[命题追踪] 各地高考卷对于函数的定义域、值域直接考查较少,一般在题目中隐含考查函数的性质;全国卷对分段函数的考查一般是结合单调性解不等式问题,题目渗透分类讨论思想、数形结合思想.

考点5 函数的基本性质

1. [答案] C

[精析] 方法一: A, B 选项中的函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; C 选项中的函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; D 选项中的函数图象的对称轴为直线 $x=1$, 该函数在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 故选 C.

方法二: 对于 A, 因为 $u=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y=-u$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $f(x)=-\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 A 错误; 对于 B, 因为 $u=2^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y=\frac{1}{u}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)=\frac{1}{2^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $u=\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $y=-u$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\left|\frac{1}{2}-1\right|}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$, $f(1)=3^{|1-1|}=3^0=1$, $f(2)=3^{|2-1|}=3$, 所以 $f(x)=3^{|x-1|}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调, 故 D 错误. 故选 C.

2. [答案] D

[精析] 对于选项 A, 函数 $f(x)=-x$ 在定义域上是减函数, 不符合题意; 对于选项 B, 函数 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在定义域上为减函数, 不符合题意; 对于选项 C, 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不符合题意; 对于选项 D, 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在定义域上为增函数. 故选 D.

3. [答案] D

[精析] 因为 $y=2^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 所以根据复合函数的单调性可得 $u=x(x-a)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 故 $\frac{a}{2}\geq 1$, 解得 $a\geq 2$, 故选 D.

4. [答案] B

[精析] 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $-\frac{2a}{-2}\geq 0$, 且 $-a\leq e^0+\ln 1$, 解得 $-1\leq a\leq 0$, 故选 B.

5. [答案] B

[精析] 方法一 放缩+同构

由题知 $2^a+\log_2 a=4^b+\log_2 b=2^{2b}+\log_2(2b)-1<2^{2b}+\log_2(2b)$, 又函数 $y=2^x+\log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $a<2b$, 故选 B.

方法二 特殊法+临界值

由选项 $a>2b$, $a<2b$, $a>b^2$, $a<b^2$ 可知, 它们的临界状态就是 $a=2b$ 和 $a=b^2$.

令 $a=2b=2$, 则 $a=2$, $b=1$, 此时 $2^2+\log_2 2=5$, $4^1+2\log_2 1=4$, 显然 $5>4$, 且函数 $f(x)=2^x+\log_2 x$ 是增函数, 若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_2 b$, 则 $a<2b$, 排除 A 选项; 令 $a=b^2=4$, 则 $a=4$, $b=2$, 此时 $2^4+\log_2 4=4^2+2\log_2 4=18$, 排除 C, D. 故选 B.

方法三 分类讨论法

$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_2 b$ 等价于 $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$. 易知 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 都是增函数, 且 a, b 皆大于 0.

①假设 $a<b$, 则 $\log_2 a<\log_2 b$, 要使得 $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$ 成立, 那么一定有 $2^a>2^{2b}$, 即 $a>2b$, 与 $a<b$ 相矛盾, 假设不成立; ②假设 $a=b$, 则 $\log_2 a=\log_2 b$, 要使得 $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$ 成立, 那么一定有 $2^a=2^{2b}$, 即 $a=2b$, 又 a, b 皆大于 0, 所以 $a=b$ 与 $a=2b$ 不能同时成立, 假设不成立; ③假设 $a>b$, 则 $\log_2 a>\log_2 b$, 要使得 $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$ 成立, 那么一定有 $2^a<2^{2b}$, 即 $a<2b$, 符合题意. 综合①②③, 结合四个选项, 可以判断 $a<2b$ 成立. 故选 B.

6. [答案] $[1, +\infty)$

[精析] 当 $x\leq 0$ 时, $f(x)=1$; 当 $x>0$ 时, $f(x)=2^x>1$. 所以函数 $f(x)$ 的值域是 $[1, +\infty)$.

7. [答案] 0 (答案不唯一) 1

[精析] 当 $a<0$ 时, $y=-ax+1$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 不存在最小值; 当 $a=0$ 时, $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0, \\ (x-2)^2, & x\geq 0, \end{cases}$ 此时 $f(x)$ 存在最小值 0; 当 $0<a\leq 2$ 时, $f(x)=-ax+1$ ($x<a$) 的取值范围为 $(-a^2+1, +\infty)$, 而 $f(x)=(x-2)^2$ ($x\geq a$) 的取值范围为 $[0, +\infty)$, 若 $f(x)$ 存在最小值, 则需满足 $-a^2+1\geq 0$, 可得 $0<a\leq 1$; 当 $a>2$ 时, $f(x)=-ax+1$ ($x<a$) 的取值范围为 $(-a^2+1, +\infty)$, 而 $f(x)=(x-2)^2$ ($x\geq a$) 的取值范围为 $[(a-2)^2, +\infty)$, 若 $f(x)$ 存在最小值, 则需满足 $-a^2+1\geq (a-2)^2$, 此不等式无解. 综上, 实数 a 的取值范围是 $[0, 1]$, 故 a 的一个取值为 0 (答案不唯一), 最大值为 1.

8. [答案] B

[精析] 方法一: 由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 令 $h(x)=\ln\frac{2x-1}{2x+1}$, 则 $h(-x)=\ln\frac{-2x-1}{-2x+1}=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=-h(x)$, 所以 $h(x)$ 为奇函数. 令 $g(x)=x+a$, 由 $f(x)$ 为偶函数, $h(x)$ 为奇函数, 可得 $g(x)$ 为奇函数, 所以 $a=0$, 故选 B.

方法二: 由题知函数 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(1)=$

$f(-1)$, 故 $(1+a)\ln \frac{1}{3} = (-1+a)\ln 3$, 解得 $a=0$, 故选 B.

9. 【答案】B

【精析】 对于 A, 设 $f(x) = \frac{e^x - x^2}{x^2 + 1}$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $f(-1) = \frac{e^{-1} - 1}{2}$, $f(1) = \frac{e - 1}{2}$, 即 $f(-1) \neq f(1)$, 所以 $f(x)$ 不是偶函数, 故 A 不符合题意; 对于 B, 设 $g(x) = \frac{\cos x + x^2}{x^2 + 1}$, 则 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $g(-x) = \frac{\cos(-x) + (-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{\cos x + x^2}{x^2 + 1} = g(x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 故 B 符合题意; 对于 C, 设 $h(x) = \frac{e^x - x}{x + 1}$, 则 $h(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq -1\}$, 不关于原点对称, 所以 $h(x)$ 不是偶函数, 故 C 不符合题意; 对于 D, 设 $\varphi(x) = \frac{\sin x + 4x}{e^{|x|}}$, 则 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $\varphi(1) = \frac{\sin 1 + 4}{e}$, $\varphi(-1) = \frac{-\sin 1 - 4}{e}$, 即 $\varphi(1) \neq \varphi(-1)$, 所以 $\varphi(x)$ 不是偶函数, 故 D 不符合题意. 故选 B.

10. 【答案】C

【精析】方法一 通法

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $f(-x) = \frac{1}{1+2^{-x}} = \frac{2^x}{1+2^x}$,

所以 $f(-x) + f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^x} = 1$. 故选 C.

方法二 排除法

易知 $f(x)$ 是非奇非偶函数, 排除 A, B; 令 $x=0$, 则 $f(0) = \frac{1}{2}$, 排除 D. 故选 C.

11. 【答案】B

【精析】方法一 图象平移

$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{x+1} - 1$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, -1)$ 对称. 因为奇函数的图象关于原点 $(0, 0)$ 对称, 所以需要将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度, 故选 B.

方法二 奇函数的性质

对于 A, $f(x-1) = \frac{1-(x-1)}{1+x-1} = \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x} - 1$, 故

$f(x-1) - 1 = \frac{2}{x} - 2$ 不是奇函数, 故 A 不正确; 对于

B, $f(x-1) + 1 = \frac{2}{x}$ 是奇函数, 故 B 正确; 同理,

$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+x+1} = \frac{-x}{2+x}$, 显然 $f(x+1) - 1 =$

$-\frac{2(1+x)}{2+x}$, $f(x+1) + 1 = \frac{2}{2+x}$ 的图象均不关于原点对称, 因此都不是奇函数, 故 C, D 不正确. 故选 B.

知识本源 本题从数与形两个角度判断函数的奇偶性, 其中方法一是从形的角度研究, 即偶函数的图象关于 y 轴对称, 奇函数的图象关于原点对称; 方法二是从数的角度研究, 即若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则奇函数的代数特征是 $f(-x) = -f(x)$, 偶函数的代数特征是 $f(-x) = f(x)$.

12. 【答案】D

【精析】方法一 定义法

因为 $f(x) = \frac{x e^x}{e^{ax} - 1}$ 是偶函数, 所以 $f(x) = f(-x)$, 即 $\frac{x e^x}{e^{ax} - 1} = \frac{(-x) e^{-x}}{e^{-ax} - 1}$, 又 $\frac{x e^x}{e^{ax} - 1} = \frac{x [e^x - e^{(a-1)x}]}{e^{ax} - 1} = 0$, 又因为 x 不恒为 0, 所以 $e^x - e^{(a-1)x} = 0$, 即 $e^x = e^{(a-1)x}$, 则 $x = (a-1)x$, 即 $1 = a-1$, 解得 $a=2$. 故选 D.

方法二 特殊值法

因为 $f(x) = \frac{x e^x}{e^{ax} - 1}$ 是偶函数, 所以 $f(1) = f(-1)$, 即 $\frac{e}{e^a - 1} = -\frac{e^{-1}}{e^{-a} - 1}$, 解得 $a=2$, 经检验符合题意. 故选 D.

方法三 奇偶函数性质法

由题设, 可知 $f(x) = x \cdot \frac{e^x}{e^{ax} - 1}$, 且 $y=x$ 为奇函数, 则 $g(x) = \frac{e^x}{e^{ax} - 1}$ 为奇函数, 由 $g(x) + g(-x) = 0$, 解得 $a=2$. 故选 D.

方法总结 已知函数的奇偶性求参数取值这类问题的主要解法有定义法(恒等式法)、特殊值法和奇偶函数性质法. (1) 定义法: 从关于自变量的等式恒成立出发, 建立以参数为未知数的方程(组), 通过解方程(组)求参数, 该解法的关键是寻找等式恒成立的条件; (2) 特殊值法: 通过选取合适的自变量的特殊值将问题具体化, 从而简化运算; (3) 奇偶函数性质法: 注意奇偶函数定义域的对称性, 利用奇偶函数性质构建恒等式, 从而求解参数值.

13. 【答案】0

【精析】 由题意, 可得 $f(0) = 0 + a = 0$, 解得 $a=0$. 当 $a=0$ 时, $f(x) = x^3$, 满足 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, 即 $f(x)$ 是奇函数, 故 $a=0$ 符合题意.

14. 【答案】2

【精析】方法一 偶函数的定义

因为 $f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = x^2 + (a-2)x + 1 + \cos x$ 为偶函数, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 所以 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则 $(-x)^2 - (a-2)x + 1 + \cos(-x) = x^2 + (a-2)x + 1 + \cos x$ 恒成立, 可得 $a=2$.

方法二 特殊值

由题易知 $f(1) = a + \sin\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $f(-1) = 4 -$

$a + \sin\left(-1 + \frac{\pi}{2}\right)$. 由 $f(1) = f(-1)$ 可得 $a = 4 - a$, 所以 $a = 2$.

方法三 奇偶函数的运算性质

由题知函数 $f(x) = x^2 + (a-2)x + 1 + \cos x$ 为偶函数, 因为函数 $y = \cos x$ 和 $y = x^2 + 1$ 都是偶函数, 所以 $y = (a-2)x$ 是偶函数, 所以 $a = 2$.

15. 【答案】1

【精析】方法一 定义法

因为函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以对任意 x , $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 即 $(-x)^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 恒成立, 即 $-(a \cdot 2^{-x} - 2^x) = a \cdot 2^x - 2^{-x}$ 恒成立, 以 a 为基准合并同类项得 $a(2^x + 2^{-x}) = 2^x + 2^{-x}$ 恒成立(很多学生在此步骤处被卡住, 其实应该合并同类项), 故 $a = 1$.

方法二 特值法

因为函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 所以 $f(1) = f(-1)$, 即 $2a - 2^{-1} = -(a \cdot 2^{-1} - 2)$, 合并同类项得 $a(2 + 2^{-1}) = 2 + 2^{-1}$, 解得 $a = 1$.

方法三 秒杀法

因为函数 $y = x^3$ 是奇函数, 所以若函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 则函数 $y = a \cdot 2^x - 2^{-x}$ 是奇函数. 由 $y = 2^x - 2^{-x}$ 是常见的奇函数, 得 $a = 1$.

方法拓展 常见的奇函数有: $y = a^x - a^{-x}$, $y =$

$$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}, y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}, y = \log_a \frac{x-b}{x+b}, y = \log_a(\sqrt{x^2+1}+x), y = \log_a(\sqrt{x^2+1}-x), y = \frac{1}{2} - \frac{1}{a^x+1}, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{a^x-1}, y = x^{2n+1} (n \in \mathbf{N}), y = \sin x, y = \tan x \text{ 等.}$$

常见的偶函数有: $y = a^x + a^{-x}$, $y = \log_a(b+x) + \log_a(b-x)$, $y = \log_a(a^x+1) - \frac{1}{2}x$, $y = \log_a(a^{2x}+1) - x$, $y = x^{2n} (n \in \mathbf{N})$, $y = \cos x$, $y = |\sin x|$ 等.

16. 【答案】-1

【精析】 因为函数 $f(x)$ 是偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sqrt{x} - a$, 所以 $f(-4) = f(4) = \sqrt{4} - a = 3$, 解得 $a = -1$.

17. 【答案】 $-\frac{1}{2} \ln 2$

【精析】方法一 函数代数特征+列方程组求解

因为 $f(x) = \ln\left|a + \frac{1}{1-x}\right| + b$, $f(-x) = \ln\left|a + \frac{1}{1+x}\right| + b$, 所以 $f(x) + f(-x) = \ln\left|a + \frac{1}{1-x}\right| + \ln\left|a + \frac{1}{1+x}\right| + 2b = \ln\left|\left(a + \frac{1}{1-x}\right)\left(a + \frac{1}{1+x}\right)\right| + 2b = \ln\left|a^2 + \frac{a}{1-x} + \frac{a}{1+x} + \frac{1}{1-x^2}\right| + 2b = \ln\left|a^2 + \frac{2a+1}{1-x^2}\right| + 2b = 0$, 则 $a^2 + \frac{2a+1}{1-x^2} = e^{-2b}$ 恒成立, 则

$$\begin{cases} 2a+1=0, \\ a^2=e^{-2b}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{2}, \\ b=\ln 2. \end{cases}$$

方法二 奇偶函数定义域的对称性+方程

$f(x) = \ln\left|a + \frac{1}{1-x}\right| + b$ 是奇函数, 注意到 $x=1$ 不在定义域中, 由奇函数定义域的对称性知 $x \neq -1$, 即 $a + \frac{1}{1-(-1)} = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$, 再由 $f(0) = \ln|a+1| + b = 0$ 得 $b = \ln 2$.

考情分析 “多想少算”是高考数学命题的重要理念. 通过多联想、多观察、多思考可以减少或避免繁杂的运算. 上题中的方法二能很好地体现此点.

【命题追踪】 全国卷对于函数单调性和奇偶性的单独考查一般难度不大, 重点考查其基本概念. 通过选题可以看出, 考查的函数以幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等为载体, 通过四则运算构造、分段构造、复合构造、指对数运算等居多. 在研究过程中, 可以从数形两方面研究函数的单调性和奇偶性.

18. 【答案】D

【精析】 对于 A, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 为}$$

偶函数, 故 A 错误. 对于 B, $f(x) = \sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 易知 $f(x)$ 在定义域上不单调递增, 故 B 错误. 对于 C, **方法一:** $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $f'(x) = -2^{-x} \ln 2 - 2^x \ln 2 < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故 C 错误. **方法二:** $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $y = 2^{-x}$ 和 $y = -2^x$ 均在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以函数 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故 C 错误.

对于 D, **方法一:** $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 的定义域为 $(-5, 5)$, 因为 $f(x) = \ln(5+x) - \ln(5-x)$, $f(-x) = \ln(5-x) - \ln(5+x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 因为 $f'(x) = \frac{1}{5+x} + \frac{1}{5-x} = \frac{5-x+5+x}{25-x^2} = \frac{10}{25-x^2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增, 故 D 正确. **方法二:**

$f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 的定义域为 $(-5, 5)$, 因为 $f(x) = \ln(5+x) - \ln(5-x)$, $f(-x) = \ln(5-x) - \ln(5+x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 因为 $y = \ln(5+x)$ 和 $y = -\ln(5-x)$ 均在 $(-5, 5)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增, 故 D 正确. 故选 D.

19. 【答案】A

【精析】方法一 先求解析式, 再求值

当 $x \in [1, 2)$ 时, $4-x \in (2, 3]$, 因为 $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 所以 $f(x) = f(-x) = f(4-x) = 5 -$

$2(4-x)=2x-3$, 故当 $1 \leq x < 2$ 时, $f(x)=2x-3$,
所以 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)=2 \times \frac{5}{4}-3=-\frac{1}{2}$.

方法二 利用周期性和对称性将 x 转化到已知函数解析式的区间内

因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)$, 因为 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 所以 $f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(2+\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{11}{4}\right)$. 由题可得 $f\left(\frac{11}{4}\right)=5-2 \times \frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$,
故 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.

方法三 利用周期性和奇偶性转化为对称性求值

由题知 $f(-x)=f(x)$, $f(x+2)=f(x)$, 所以 $f(x+2)=f(-x)$, 所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 $f(x)=f(2-x)$, 将 $x=-\frac{3}{4}$ 代入得,
 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{11}{4}\right)=5-2 \times \frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$. 故选 A.

方法拓展 设 $f(x)$ 的周期为 T , 对 $f(x)$ 的定义域内任一自变量的值 x , 有如下结论:

- (1) 若 $f(x+a)=-f(x)$ ($a \neq 0$), 则 $T=2|a|$;
- (2) 若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$ ($a \neq 0$), 则 $T=2|a|$;
- (3) 若 $f(x+a)=f(x+b)$ ($a \neq b$), 则 $T=|a-b|$.

20. 【答案】A

题眼 函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 只需考查 $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}$ 与对称轴 $x=1$ 的距离, 结合函数 $f(x)$ 的单调性即可求解.

【精析】 由题得 $f'(x)=e^{-(x-1)^2}(-2x+2)$. 令 $f'(x)=0$, 则 $x=1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 又 $f(2-x)=e^{-(2-x-1)^2}=e^{-(1-x)^2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $c=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)$, 又 $1 > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4-\sqrt{6}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) > f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 即 $b > c > a$. 故选 A.

21. 【答案】C

【精析】 由已知有 $f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(1+\frac{2}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=-f\left(\frac{2}{3}\right)=-f\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=-f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

22. 【答案】B

【精析】方法一 常规推导

$\because f(x+2)$ 是偶函数, $\therefore f(-x+2)=f(x+2)$.
 $\because f(2x+1)$ 是奇函数, $\therefore f(-2x+1)=-f(2x+1)$. 由 $F(x)=f(2x+1)$ 是奇函数, 可得 $F(0)=f(1)=0$, $\therefore f(-1)=-f(3)=-f(1)=0$, 其他几个选项不一定成立, 故选 B.

方法二 特殊函数秒杀

由 $f(x+2)$ 是偶函数, $f(2x+1)$ 是奇函数, 可取 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\pi\right)$, 可得 $f(-1)=0$, 其他几个选项均不成立, 故选 B.

23. 【答案】A

【精析】方法一 常规推导

令 $x=1, y=0$, 得 $2f(1)=f(1)f(0)$, 所以 $f(0)=2$.
令 $y=1$, 得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)$, 所以 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$, 即 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$, 所以 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$, 所以 $f(x+2)=-f(x-1)$, 即 $f(x+3)=-f(x)$, 所以 $f(x)=-f(x+3)=f(x+6)$, 即 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数. 因为 $f(0)=2, f(1)=1, f(2)=f(1)-f(0)=-1, f(3)=-f(0)=-2, f(4)=-f(1)=-1, f(5)=-f(2)=1, f(6)=f(0)=2$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=[f(1)+f(2)+\cdots+f(18)]+[f(19)+f(20)+f(21)+f(22)]=f(19)+f(20)+f(21)+f(22)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-3$.

方法二 特殊函数

因为 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$, $f(1)=1$, 且由方法一知 $f(x)$ 的周期为 6, 所以取特殊函数 $f(x)=2\cos\frac{\pi x}{3}$. 因为 $f(2)=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1, f(3)=2\cos\pi=-2, f(4)=2\cos\frac{4\pi}{3}=-1, f(5)=2\cos\frac{5\pi}{3}=1, f(6)=f(0)=2$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=3[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=3 \times (1-1-2-1+1+2)+1-1-2-1=-3$. 故选 A.

方法拓展 对称性与周期性之间有紧密的联系, 解决此类问题除了常规的逻辑推导之外, 类比三角函数, 很容易得到对称性与周期性的关系.

1. 关于函数图象的对称中心或对称轴的常用结论:

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称;

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称;

(3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=-f(b-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ 对称;

(4) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)+f(b-x)=c$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 对称.

2. 对称性与周期性之间的常用结论:

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的周期 $T=2|b-a|$;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的周期 $T=2|b-a|$;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和点 $(b,0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的周期 $T=4|b-a|$.

24. 【答案】D

【精析】 由 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 满足 $f(x)+f(x-2)=0$, 可得 $f(x)+f(2-x)=0$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称, 则 $f(1)=0$, 又 $f(x+2)=-f(x)=f(x-2)=f(2-x)$, 所以 $f(x+4)=f(-x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 且 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 所以

$$\begin{cases} f(1)=f(-1)=f(3)=0, \\ f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right), \end{cases} \quad \text{即}$$

$$\begin{cases} 9+3a+b=0, \\ \frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b=\frac{25}{4}+\frac{5}{2}a+b, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=-4, \\ b=3. \end{cases} \quad \text{故选 D.}$$

25. 【答案】D

【精析】方法一 常规推导(分析得到函数 $g(x)$ 的性质, 进而求得函数值)

由 $f(x)+g(2-x)=5$ 得 $f(x)=5-g(2-x)$ ①. 由 $g(x)-f(x-4)=7$ 得 $f(x-4)=g(x)-7$, 所以 $f(x)=g(x+4)-7$ ②. 由 ①② 得 $5-g(2-x)=g(x+4)-7$, 即 $g(x+4)+g(2-x)=12$, 所以 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(3,6)$ 对称, $g(3)=6$, 又 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以函数 $g(x)$ 是周期为 4 的函数, 且 $g(1)=g(3)=6$, $f(x)=g(x)-7$. 因为 $g(4)+g(2)=12$, 所以 $g(4)=12-g(2)=12-4=8$, 所以 $f(1)=g(1)-7=-1$, $f(2)=g(2)-7=-3$, $f(3)=g(3)-7=-1$, $f(4)=g(4)-7=1$, 所以

$$\sum_{k=1}^{22} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(22) = 5 \times (-4) + (-1) + (-3) = -24. \quad \text{故选 D.}$$

方法二 常规推导(分析得到函数 $f(x)$ 的性质, 进而求得函数值)

因为 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $g(2-x)=g(2+x)$. 由 $f(x)+g(2-x)=5$, 得 $f(-x)+g(2+x)=5$, 所以 $f(-x)=f(x)$. 因为 $g(x)-f(x-4)=7$, 所以 $g(2-x)=f(-x-2)+7=f(x+2)+7$. 由 $f(x)+g(2-x)=5$, 得 $f(x)+f(x+2)=-2$, 所以 $f(x+4)=-2-f(x+2)=f(x)$, 即 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 由 $f(-x)=f(x)$ 和 $f(x)+f(x+2)=-2$, 得 $2f(1)=f(-1)+f(1)=-2$, 故 $f(1)=-1$. 由 $f(-x)=f(x)$ 和 $g(x)-f(x-4)=7$ 及 $g(2)=4$, 得 $g(2)-f(-2)=4-f(2)=7$, 故 $f(2)=-3$. 由 $f(-x)=f(x)$ 和 $f(x)+f(x+2)=-2$, 得 $f(1)+f(3)=-2$, 故 $f(3)=-1$. 由 $f(x)+g(2-x)=5$,

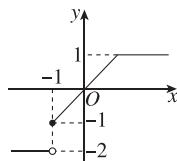
得 $f(0)=5-g(2)=1$, 故 $f(4)=1$. 于是 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 5 \times (-1-3-1+1) - 1 - 3 = -24$. 故选 D.

方法三 构造特殊函数

构造函数 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x-1$, $g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x+6$, 显然, $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $g(2)=4$, 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(2-x)=5$, $g(x)-f(x-4)=7$. 直接计算得 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = -24$. 故选 D.

26. 【答案】B

【精析】 对于 A, 当 $x < x_0$ 时, $f(x) < f(x_0)$, 当 $x_0=1$ 时, $x_0 \in [-1,1]$, 对于任意 $x \in (-\infty, 1)$, $f(x) < f(1)$ 恒成立, 若 $f(x)$ 是偶函数, 此时 $f(1)=f(-1)$, 矛盾, 故 A 错误; 对于 B, 若 $f(x)$ 的图象如图, 当 $x < -1$ 时, $f(x) = -2$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \in [-1,1]$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) = 1$, 所以存在 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值, 故 B 正确; 对于 C, 若函数 $f(x)$ 严格递增, 则集合 M 不会是 $[-1,1]$, 而是函数的定义域, 故 C 错误; 对于 D, 若存在 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取到极小值, 则存在 $n < -1$, 使得 $f(n) > f(-1)$, 与集合 M 的定义矛盾, 故 D 错误. 故选 B.

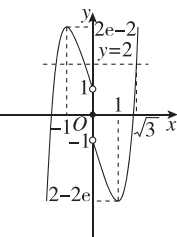


27. 【答案】ABD

【精析】 对于 A 项, 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0)=0$, A 正确. 对于 B 项, 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $f(-x) = [(-x)^2 - 3]e^{-x} + 2 = (x^2 - 3)e^{-x} + 2$, 所以 $f(x) = -f(-x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$, 故 $f(x) = \begin{cases} -(x^2 - 3)e^{-x} - 2, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ (x^2 - 3)e^x + 2, & x > 0, \end{cases}$ B 正确.

对于 C 项, **方法一:** 当 $x < 0$ 时, 由 $f(x) \geq 2$, 得 $-(x^2 - 3)e^{-x} - 2 \geq 2$, 即 $(x^2 - 3)e^{-x} + 4 \leq 0$. 设 $g(x) = (x^2 - 3)e^{-x} + 4$ ($x < 0$), 则 $g'(x) = (3 - x)(x + 1)e^{-x}$, 易知 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 且 $g(-\sqrt{3}) = 4 > 0$, $g(-1) = -2e + 4 < 0$, $g(0) = 1 > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上存在 2 个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 其中 $x_1 \in (-\sqrt{3}, -1)$, $x_2 \in (-1, 0)$, 当 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $g(x) > 0$; 当 $x \in [x_1, x_2]$ 时, $g(x) \leq 0$; 当 $x \in (x_2, 0)$ 时, $g(x) > 0$. 故当 $x < 0$ 时, $f(x) \geq 2$ 的解集为 $[x_1, x_2]$. 当 $x > 0$ 时, 由 $f(x) \geq 2$, 得 $(x^2 - 3)e^x + 2 \geq 2$, 则 $x \geq \sqrt{3}$. 故 C 错误.

方法二: 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x - 1)(x + 3)e^x$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 - 2e < 0$, $f(\sqrt{3}) = 2 > 0$, 故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 由奇函数定义可得 $f(x)$ 的图象如图所示, 由图可知 $x =$



-1 是 $f(x)$ 的极大值点, 且 $f(-1)=2e-2>2$, 故 **C 错误**. 对于 D 项, 当 $x>0$ 时, $f(x)=(x^2-3)e^x+2$, 则 $f'(x)=(x+3)(x-1)e^x$, $f'(1)=0$, 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增, 故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 得 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, **D 正确**. 故选 ABD.

考情分析 2025 年高考评析中强调融会贯通, 增强同一主题必修模块与选择性必修模块间的联系, 促进各分支知识本身的纵向延伸. 本题以分段函数为背景, 考查函数的奇偶性、单调性、极值点以及函数与方程、不等式之间的联系等内容, 充分体现了高考评价体系中的融会贯通.

28. 【答案】ABC

【精析】 A 项, 令 $x=y=0$, 可得 $f(0)=0$, 故 **A 正确**. B 项, 令 $x=y=1$, 则 $f(1)=f(1)+f(1)$, 可得 $f(1)=0$, 故 **B 正确**. C 项, 令 $x=y=-1$, 则 $f(1)=f(-1)+f(-1)$, 可得 $f(-1)=0$; 令 $y=-1$, 则 $f[x \times (-1)] = (-1)^2 \times f(x) + x^2 \times f(-1)$, 可得 $f(-x)=f(x)$, 故 $f(x)$ 是偶函数, 故 **C 正确**.

D 项, **方法一**: 设函数 $f(x)=0$, 此时满足 $f(xy)=y^2 f(x)+x^2 f(y)$, 但函数 $f(x)$ 没有极值点, 故 **D 错误**.

方法二: 当 $x^2 y^2 \neq 0$ 时, $f(xy)=y^2 f(x)+x^2 f(y)$ 两边同时除以 $x^2 y^2$, 得 $\frac{f(xy)}{x^2 y^2} = \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(y)}{y^2}$. 不妨

设 $\frac{f(x)}{x^2} = \ln|x| (x \neq 0)$, 则 $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 \ln(-x), & x < 0, \end{cases}$ 易

得 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点而非极小值点, 故 **D 错误**. 故选 ABC.

方法拓展 处理抽象函数类型的问题, 一般是先代入一些特殊值, 尽量得到函数取值或者性质的信息.

29. 【答案】②③

【精析】 对于①, 假设存在 $\mathbf{R}$ 上的增函数 $f(x)$, 满足 $f(x)+f(2x)=-x$, 则 $f(0)+f(2 \times 0)=-0$, 即 $f(0)=0$, 故当 $x>0$ 时, $f(4x)>f(2x)>f(x)>0$, 故 $f(4x)+f(2x)>f(x)+f(2x)$, 故 $-2x>-x$, 即 $x<0$, 与 $x>0$ 矛盾, 故①错误; 对于②, 取 $f(x)=-\frac{1}{3}x$, 该函数为 $\mathbf{R}$ 上的减函数且 $f(x)+f(2x)=-x$, 故该函数符合题意, 故②正确; 对于③, 取 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+mx$, $m \in \mathbf{R}$, 此时 $f(x)+f(-x)=\cos x$, 由 $m \in \mathbf{R}$ 可得 $f(x)$ 有无穷多个, 故③正确; 对于④, 假设存在 $f(x)$, 使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$, 令 $x=0$, 则 $0=\cos 0$, 但 $\cos 0=1$, 矛盾, 所以满足 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 的函数 $f(x)$ 不存在, 故④错误. 故说法正确的有②③.

【命题追踪】 高考对函数性质的考查, 难题主要是集中在周期性和对称性题目上, 这些题大多以抽象函数的形式出现, 通过给定条件, 从复合函数奇偶性, 判断自变量函数的周期性和对称性, 考查知识点很全面; 还有少量题目会和导数的部分知识结合起来考查, 区分度会稍有增加.

解决这类题目的通法是借助特殊值和函数的性质通过递推来解决, 还可以通过函数性质拓展联想到已经学过的函数或其他知识, 后面的方法较为简单, 但对学生整体水平要求较高.

考点 6 幂函数、指数函数、对数函数

1. 【答案】C

【精析】 由 $\log_8 3=b$, 得 $8^b=2^{3b}=3$, 所以 $4^{a-3b}=\frac{4^a}{4^{3b}}=\frac{2^{2a}}{2^{6b}}=\frac{(2^a)^2}{(2^{3b})^2}=\frac{25}{9}$. 故选 C.

2. 【答案】B

【精析】 $(2\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2) = (\log_2 3 + \frac{1}{3}\log_2 3)(\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_3 2) = \frac{4}{3}\log_2 3 \times \frac{3}{2}\log_3 2 = 2$. 故选 B.

3. 【答案】C

【精析】 $\because 2^a=10, \therefore a=\log_2 10$, 则 $\frac{1}{a}=\lg 2$, 同理可得 $\frac{1}{b}=\lg 5, \therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\lg 2+\lg 5=1$.

4. 【答案】1

【精析】 $f\left(\frac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}+\log_2 \frac{1}{2}=2-1=1$.

5. 【答案】64

【精析】 因为 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_4 a} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2}\log_2 a = -\frac{5}{2}$, 所以 $(\log_2 a+1)(\log_2 a-6)=0$, 又 $a>1$, 所以 $\log_2 a=6$, 则 $a=64$.

重要结论 对数的运算

1. 运算法则: $a>0$, 且 $a \neq 1, M>0, N>0$

(1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$;

(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

(3) $\log_a M^n = n \log_a M$.

2. 换底公式

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} (a>0, \text{ 且 } a \neq 1; c>0, \text{ 且 } c \neq 1; b>0)$.

3. 可用换底公式得到以下结论:

① $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

② $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$;

③ $\log_{a^n} b^n = \log_a b$;

④ $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$;

⑤ $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$.

$$m+1)(1-q^2)-P(X_{2m}=m+1)=P(X_{2m}=m)p^2-q^2P(X_{2m}=m+1)=C_{2m}^mp^mq^mp^2-q^2C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}=C_{2m}^mp^{m+2}q^m-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m+1}, \quad (14 \text{ 分})$$

$$\text{同理可得 } q_{2m+2}-q_{2m}=C_{2m}^mq^{m+2}p^m-C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^{m+1}, \\ \text{所以 } p_{2m+2}-p_{2m}>q_{2m+2}-q_{2m} \Leftrightarrow C_{2m}^mp^{m+2}q^m-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m+1}>C_{2m}^mq^{m+2}p^m-C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^{m+1} \Leftrightarrow \\ C_{2m}^mp^{m+2}q^m>C_{2m}^mq^{m+2}p^m \Leftrightarrow p^2>q^2 \Leftrightarrow p>q, \text{故②得证.} \quad (16 \text{ 分})$$

综上,不等式 $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$ 成立. (17 分)

5. **精解:** (1) 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 20, 100. (1 分)

$P(X=0)=1-0.8=0.2, P(X=20)=0.8 \times (1-0.6)=0.32, P(X=100)=0.8 \times 0.6=0.48$, 故随机变量 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

(5 分)

(2) 若小明先回答 B 类问题, 记 Y 为小明的累计得分, 则随机变量 Y 的所有可能取值为 0, 80, 100.

$$P(Y=0)=1-0.6=0.4, P(Y=80)=0.6 \times (1-0.8)=0.12, P(Y=100)=0.6 \times 0.8=0.48, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{则 } E(Y)=0 \times 0.4+80 \times 0.12+100 \times 0.48=57.6.$$

$$\text{由(1)知 } E(X)=0 \times 0.2+20 \times 0.32+100 \times 0.48=54.4, \quad (10 \text{ 分})$$

因为 $E(Y)>E(X)$, 所以小明应选择先回答 B 类问题. (12 分)

6. **精解:** (1) 若甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分, 则甲在第一阶段比赛中至少投中 1 次, 乙在第二阶段比赛中也至少投中 1 次 (提示: 解决含有“至少”“至多”等概率问题时, 可利用 1 减去其对立事件的概率),

$$\therefore \text{甲、乙所在队比赛成绩不少于 5 分的概率 } P=(1-0.6^3) \times (1-0.5^3)=0.686. \quad (3 \text{ 分})$$

(2) (i) 若甲参加第一阶段比赛, 则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率 $P_{\text{甲}}=[1-(1-p)^3]q^3$,

若乙参加第一阶段比赛, 则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率 $P_{\text{乙}}=[1-(1-q)^3]p^3$. (5 分)

$$P_{\text{甲}}-P_{\text{乙}}=q^3-(q-pq)^3-p^3+(p-pq)^3=3pq(p-q)(pq-p-q), \quad (7 \text{ 分})$$

$$\because 0 < p < q < 1, \therefore pq > 0, p-q < 0, pq-p-q < 0,$$

$$\therefore P_{\text{甲}}-P_{\text{乙}} > 0, \text{得 } P_{\text{甲}} > P_{\text{乙}}, \therefore \text{应该由甲参加第一阶段比赛.} \quad (9 \text{ 分})$$

(ii) 若甲参加第一阶段比赛, 记甲、乙所在队的比赛成绩为 X 分, 则 X 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15,

$P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3] \cdot (1-q)^3$ (易错点: X 的取值为 0 包含两种情况: 未能通过第一阶段比赛; 通过第一阶段比赛, 但第二阶段比赛 3 次投篮均未投中),

$$P(X=5)=[1-(1-p)^3]C_3^1q \cdot (1-q)^2,$$

$$P(X=10)=[1-(1-p)^3]C_3^2q^2 \cdot (1-q),$$

$$P(X=15)=[1-(1-p)^3] \cdot q^3,$$

$$\therefore E(X)=15[1-(1-p)^3]q=15(p^3-3p^2+3p) \cdot q. \quad (13 \text{ 分})$$

若乙参加第一阶段比赛, 记甲、乙所在队的比赛成绩为 Y 分, 则 Y 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15,

$$\text{同理可得 } E(Y)=15(q^3-3q^2+3q) \cdot p. \quad (15 \text{ 分})$$

$$\because E(X)-E(Y)=15pq(p-q)(p+q-3)>0,$$

$$\therefore \text{应该由甲参加第一阶段比赛.} \quad (17 \text{ 分})$$

【命题追踪】 比赛问题和决策问题与实际生活联系紧密, 考查数学在生活中的应用, 是概率分布问题常考的问题. 题目一般考查比较灵活, 难度也不太固定. 常见考查方式如下: 比较不同方案下的概率或期望、方差的大小作出决策, 难度适中; 与数列、不等式、函数等内容综合考查, 从概率问题中抽象出数学问题, 一般难度较大.

专题十二 函数、导数与其他模块交汇

1. 【答案】D

【精析】 因为函数 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 可得 $a=1$, 则 $f(x)=x^3+x$, $f'(x)=3x^2+1$, 所以 $f'(0)=1$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=x$.

2. 【答案】BC

【精析】方法一 对称性和周期性的关系+构造函数

因为奇函数的导函数为偶函数, 偶函数的导函数为奇函数, 所以 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$ 的导函数 $-2g\left(\frac{3}{2}-2x\right)$ 为奇函数, 所以 $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$, $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称, 又 $g(2+x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $g(x)$ 是一个周期为 2 的周期函数, 所以 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$, 故 B 正确. 因为 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$

为偶函数, 所以 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称, 所以 $f(-1)=f(4)$, 故 C 正确. 取 $f(x)=\sin \pi x+1$, 则 $f'(x)=\pi \cos \pi x$, 即 $g(x)=\pi \cos \pi x$, 则 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=\sin \pi\left(\frac{3}{2}-2x\right)+1=-\cos 2\pi x+1$ 为偶函数, $g(2+x)=\pi \cos \pi(2+x)=\pi \cos \pi x$ 为偶函数, 满足题意, 此时 $f(0)=1$, $g(-1)=-\pi$, $g(2)=\pi$, 故 A、D 均错误. 故选 BC.

方法二 特殊值+构造函数
由方法一知 $g(x)$ 的一个周期为 2, 且其图象关于直线 $x=2$ 对称, 关于点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称, 故可设 $g(x)=\cos \pi x$, 则 $f(x)=\frac{1}{\pi} \sin \pi x+c$ (c 为常数), 显然 A、D 错误, B、C 正确. 故选 BC.

方法二 特殊值+构造函数
由方法一知 $g(x)$ 的一个周期为 2, 且其图象关于直线 $x=2$ 对称, 关于点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称, 故可设 $g(x)=\cos \pi x$, 则 $f(x)=\frac{1}{\pi} \sin \pi x+c$ (c 为常数), 显然 A、D 错误, B、C 正确. 故选 BC.

方法二 特殊值+构造函数

由方法一知 $g(x)$ 的一个周期为 2, 且其图象关于直线 $x=2$ 对称, 关于点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称, 故可设 $g(x)=\cos \pi x$, 则 $f(x)=\frac{1}{\pi} \sin \pi x+c$ (c 为常数), 显然 A、D 错误, B、C 正确. 故选 BC.

错误, B、C 正确. 故选 BC.

3. 【答案】 $2x-y=0$

【精析】 当 $x>0$ 时, $-x<0$, $\therefore$ 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=e^{-x-1}-x$, $\therefore f(-x)=e^{x-1}+x$. 又 $\because f(-x)=f(x)$, $\therefore$ 当 $x>0$ 时, $f(x)=e^{x-1}+x$, $f'(x)=e^{x-1}+1$, 即 $f'(1)=2$, $\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为 $y-2=2(x-1)$, 整理得 $2x-y=0$.

4. **精解:** (1) 当 $b=0$ 时, $f(x)=\ln \frac{x}{2-x}+ax$, $f(x)$ 的定

义域为 $(0,2)$, (1分)

$$f'(x) = \frac{2}{x(2-x)} + a.$$

$\therefore \frac{2}{x(2-x)} + a \geq 2 + a$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号,

(3分)

$\therefore$ 若 $f'(x) \geq 0$, 则只需 $2+a \geq 0$, 解得 $a \geq -2$, 故 a 的最小值为 -2 . (5分)

(2) 证明: $\therefore f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$, 关于 1 对称, 且

$$f(x) + f(2-x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3 + \ln \frac{2-x}{x} + a(2-x) + b(1-x)^3 = 2a, \quad (7分)$$

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形, 对称中心为点 $(1,a)$. (9分)

(3) 方法一 分类讨论+最值

令函数 $g(x)=f(x)+2$, 依题意知 $g(x)>0$ 当且仅当 $1<x<2$ 时成立, 从而 $g(1) \leq 0$,

若 $g(1)<0$, 则由 $g\left(\frac{3}{2}\right)>0$, 可得存在 $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$,

使 $g(x_0)=0$, 与题意矛盾,

从而 $g(1)=0$, 即 $f(1)=-2$, 故 $a=-2$. (10分)

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} + 3b(x-1)^2 = (x-1)^2 \left[\frac{2}{x(2-x)} + 3b \right]. \quad (12分)$$

若 $b < -\frac{2}{3}$, 则当 $x \in \left(1, 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3b}}\right)$ 时, $\frac{2}{x(2-x)} + 3b < 0$, 从而 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(1, 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3b}}\right)$

上单调递减, 不符合题意. (14分)

若 $b \geq -\frac{2}{3}$, 则当 $x \in (1,2)$ 时, $\frac{2}{x(2-x)} + 3b > 0$ 恒成立, 从而 $f'(x) > 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增, 又 $f(1)=-2$, 当 $x \rightarrow 2$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, $\therefore$ 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) \in (-2, +\infty)$, 符合题意. (16分)

综上, b 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$. (17分)

方法二 端点效应

由函数 $f(x)$ 连续及题意知 $f(1)=-2$, 故 $a=-2$, (10分)

$$\text{故 } f(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x + b(x-1)^3, f'(x) = \frac{2}{x(2-x)} - 2 + 3b(x-1)^2, f'(1)=0.$$

令 $m(x)=f'(x)$,

$$\text{则 } m'(x) = (x-1) \left[\frac{4}{x^2(2-x)^2} + 6b \right]. \quad (12分)$$

$y=x(2-x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减, 由复合函数的单调性知 $g(x) = \frac{4}{x^2(2-x)^2} + 6b$ 在 $(1,2)$ 上单调递增. (13分)

若 $g(1) \geq 0$, 即 $4+6b \geq 0$, 即 $b \geq -\frac{2}{3}$,

则当 $x \in (1,2)$ 时, $g(x) > g(1) \geq 0$, 则 $m'(x) > 0$, $\therefore f'(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增, $\therefore f'(x) > f'(1)=0$, $\therefore f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增, $\therefore$ 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) > f(1)=-2$, 满足题意. (14分)

若 $g(1) < 0$, 即 $4+6b < 0$, 即 $b < -\frac{2}{3}$,

当 $x \rightarrow 2$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,

则存在 $x_0 \in (1,2)$, 使得 $g(x_0)=0$,

当 $1 < x < x_0$ 时, $m'(x) < 0$, 当 $x_0 < x < 2$ 时, $m'(x) > 0$, $\therefore f'(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 2)$ 上单调递增, $\therefore$ 当 $x \in (1, x_0)$ 时, $f'(x) < f'(1)=0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x \in (1, x_0)$ 时, $f(x) < f(1)=-2$, 不满足题意. (16分)

综上, b 的取值范围为 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$. (17分)

教材溯源 第2问源自人A教材必修第一册第87页第13题

我们知道, 函数 $y=f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为奇函数, 有同学发现可以将其推广为: 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $P(a,b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数.

(1) 求函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 图象的对称中心;

(2) 类比上述推广结论, 写出“函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴成轴对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为偶函数”的一个推广结论.

答案: (1) $(1, -2)$; (2) 略.

5. 精解: (1) 由题可知 $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$, $D(-1)=\left\{d \in \mathbf{R} \mid f(-1+d) > \frac{1}{2}\right\}$, 令 $t=-1+d$.

当 $t < 0$ 时, $f(t)=2^t$, 令 $f(t) > \frac{1}{2}$, 得 $2^t > \frac{1}{2}=2^{-1}$, 解得 $t > -1$, 所以 $-1 < t < 0$; (1分)

当 $t \geq 0$ 时, $f(t)=1-t$, 令 $f(t) > \frac{1}{2}$, 得 $1-t > \frac{1}{2}$, 解得 $t < \frac{1}{2}$, 所以 $0 \leq t < \frac{1}{2}$. (2分)

综上所述, t 的取值范围是 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$,

又 $t=-1+d$, 所以 $-1 < -1+d < \frac{1}{2}$, 解得 $0 < d < \frac{3}{2}$, 所以 $D(-1)=\left\{d \in \mathbf{R} \mid 0 < d < \frac{3}{2}\right\}$. (3分)

(2) 证明: 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x)=-f(-x)=-2^{-x}$, 且 $f(0)=0$, (4分)

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -2^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

当 $x < 0$ 时, $f(x) \in (0,1)$, 令 $f(x+d) > f(x) > 0$, 得 $x+d < 0$, 且 $2^{x+d} > 2^x$, 所以 $d < -x$ 且 $d > 0$, 所以 $D(x)=(0, -x)$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) \in (-1, 0)$, 令 $f(x+d) > f(x) = -2^{-x}$.

若 $x+d < 0$, 则 $f(x+d) > 0 > -2^{-x}$, 解得 $d < -x$;

若 $x+d=0$, 则 $f(0)=0 > -2^{-x}$, 解得 $d=-x$;

若 $x+d > 0$, 则 $f(x+d) = -2^{-(x+d)} > -2^{-x}$,

即 $-(x+d) < -x$, 解得 $d > 0$.

综上, $D(x) = (-\infty, -x] \cup (0, +\infty)$. (6分)

已知 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 且 $x_1 x_2 \neq 0$.

若 $x_1 < 0, x_2 < 0$, 则 $2^{x_1} \leq 2^{x_2}$, 则 $x_1 \leq x_2 < 0$,

所以 $-x_1 \geq -x_2 > 0$, 所以 $D(x_1) = (0, -x_1)$,

$D(x_2) = (0, -x_2)$, 所以 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$.

若 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 则 $-2^{-x_1} \leq -2^{-x_2}$, 则 $-x_1 \geq -x_2$,

所以 $0 < x_1 \leq x_2$, 所以 $D(x_1) = (-\infty, -x_1] \cup (0, +\infty)$,

$D(x_2) = (-\infty, -x_2] \cup (0, +\infty)$,

所以 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$.

若 $x_1 > 0, x_2 < 0$, 则 $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, 满足 $f(x_1) \leq$

$f(x_2)$, 则 $D(x_1) = (-\infty, -x_1] \cup (0, +\infty)$,

$D(x_2) = (0, -x_2)$, 所以 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$.

若 $x_1 < 0, x_2 > 0$, 则 $f(x_1) > 0 > f(x_2)$, 与 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 矛盾.

综上所述, $D(x_2) \subseteq D(x_1)$. (8分)

(3)(i) 证明: 假设 $f(0) < 1$. 若 $f(0) \leq 0$, 取 $x_1 = -\frac{1}{2}$,

则 $f(x_1) = 2^{-\frac{1}{2}} > 0$, 则 $f(0) < f(x_1)$, 则 $D(x_1) \subseteq D(0)$, (10分)

取 $d = \frac{1}{4}$, 则 $x_1 + d = -\frac{1}{4} < 0$, 则 $2^{-\frac{1}{2}} = f(x_1) <$

$f(x_1 + d) = 2^{-\frac{1}{4}}$,

因为 $D(x_1) \subseteq D(0)$, 所以 $d \in D(x_0)$, $f(d) > f(0)$,

又 $d = \frac{1}{4} \in (0, 1)$, 由②知 $f(d) < f(0)$, 矛盾. (11分)

若 $0 < f(0) < 1$, 令 $x_0 = \log_2 f(0)$, 则 $x_0 < 0$,

则 $f(x_0) = 2^{x_0} = f(0)$. 若 $f(x_0) \leq f(0)$, 则 $D(0) \subseteq$

$D(x_0)$, 若 $f(0) \leq f(x_0)$, 则 $D(x_0) \subseteq D(0)$,

所以 $D(x_0) = D(0)$.

记 $x = \min\{a, b\}$ 为取 a, b 中的较小值,

取 $d_0 = \min\left\{-\frac{x_0}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

因为 $x_0 < 0$, 所以 $0 < d_0 \leq \frac{1}{2} < 1$,

由②知 $f(d_0) < f(0)$, 则 $d_0 \notin D(0)$.

又 $x_0 + d_0 \leq x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2} < 0$, $f(x_0 + d_0) = 2^{x_0 + d_0} >$

$2^{x_0} = f(x_0)$, 所以 $d_0 \in D(x_0)$, 与 $D(x_0) = D(0)$ 矛盾.

综上所述, 假设不成立, 所以 $f(0) \geq 1$. (12分)

(ii) 证明: 若 $x \in (0, 1)$, 假设 $f(x) > 0$,

取 $c < 0$ 使得 $f(c) = 2^c < f(x)$.

由②知 $f(x) < f(0)$, $f[x + (-x)] = f(0) > f(x)$,

所以 $-x \in D(x)$,

由①知, $f(c) < f(x)$, 则 $D(x) \subseteq D(c)$.

$-x \in D(x)$, 则 $f[c + (-x)] = f(c - x) > f(c)$.

因为 $c < 0, x > 0$, 所以 $c - x < c < 0$.

当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$ 单调递增, 所以 $f(c - x) <$

$f(c)$, 矛盾, 所以 $\forall x \in (0, 1), f(x) \leq 0$. (14分)

若 $x \geq 1$, 假设 $f(x) > 0$, 取 $b < 0$ 使得 $f(b) = 2^b < f(x)$,

$f[b + (x - b)] = f(x) > f(b)$, 则 $x - b \in D(b)$.

令 $b' = \frac{1}{2} - (x - b)$, 因为 $x \geq 1, b < 0$, 所以 $x - b > 1$,

则 $b' < -\frac{1}{2} < b < 0$, 所以 $f(b') = 2^{b'} < 2^b = f(b)$.

由①知, $D(b) \subseteq D(b')$, 则 $x - b \in D(b')$, 则 $f[b' + (x -$

$b)] = f\left(\frac{1}{2}\right) > f(b') > 0$, 与 $\frac{1}{2} \in (0, 1), f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$ 矛盾,

所以 $\forall x > 0, f(x) \leq 0$. (15分)

取 $0 < x < y$, 因为 $y - x > 0$, 所以 $-(y - x) - 1 < -1 < 0$, $f[-(y - x) - 1] = 2^{-(y - x) - 1} > 0$.

又 $x > 0$, 所以 $f(x) \leq 0$, 则 $f(x) < f[-(y - x) - 1]$.

由①知, $D[-(y - x) - 1] \subseteq D(x)$.

因为 $-(y - x) - 1 < -1 < 0$, 所以 $f[-(y - x) - 1] < f(-1)$.

$f[-(y - x) - 1 + (y - x)] = f(-1) > f[-(y - x) - 1]$, 所以 $y - x \in D(x)$, (16分)

所以 $f[x + (y - x)] > f(x)$, 即 $f(y) > f(x)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增, 得证. (17分)

6. [答案] C

[精析] 方法一: 因为 $f(-x) = \sin|-x| + |\sin(-x)| = \sin|x| + |\sin x| = f(x)$, 所以函数

$f(x)$ 为偶函数, ①正确; 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f(x) =$

$\sin x + \sin x = 2\sin x$, 函数 $f(x)$ 单调递减, ②错误; 当

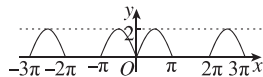
$x \in [-\pi, 0]$ 时, $f(x) = \sin(-x) - \sin x = -2\sin x$, 即

当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2\sin x, & x \in (0, \pi], \\ -2\sin x, & x \in [-\pi, 0], \end{cases}$ 可

知函数 $f(x)$ 的图象在区间 $[-\pi, \pi]$ 上与 x 轴只有 3 个交点, 即函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 3 个零点, ③错误; 当 $x \in [2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi] (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $f(x) =$

$\sin x - \sin x = 0$, 又 $f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(x)$ 的最大值为 2, 故④正确. 综上所述, ①④正确, 故选 C.

方法二: 画出函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 的图象如图, 由图可得①④正确, 故选 C.



7. [答案] ②③

[精析] $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 关于原点

对称. 对于①②, 因为 $f(-x) = -\sin x + \frac{1}{-\sin x} =$

$-(\sin x + \frac{1}{\sin x}) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 其

图象关于原点对称, 所以①是假命题, ②是真命题.

对于③, 方法一: 因为 $f(\pi - x) = \sin(\pi - x) +$

$\frac{1}{\sin(\pi - x)} = \sin x + \frac{1}{\sin x} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象

关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 所以③是真命题.

方法二: 因为 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$

$$\cos x + \frac{1}{\cos x}, f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} =$$

$$\cos x + \frac{1}{\cos x}, \text{ 所以 } f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \text{ 所以}$$

$f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 所以③是真命题.

对于④, **方法一**: 因为 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 2$, 所以④是假命题.

方法二: 令 $t = \sin x$, 则 $\varphi(t) = t + \frac{1}{t}, t \in [-1, 0) \cup$

$(0, 1]$, 当 $0 < t \leq 1$ 时, $\varphi(t) = t + \frac{1}{t} \geq 2$, 当且仅当 $t = 1$

时取等号, 当 $-1 \leq t < 0$ 时, $\varphi(t) = t + \frac{1}{t} = -\left(-t - \frac{1}{t}\right) \leq -2$, 当且仅当 $t = -1$ 时取等号, 因此 $\varphi(t)$ 的值

域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, 即 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, 所以④是假命题. 故所有真命题的序号是②③.

8. 【答案】8

【精析】 $\because \sin A = 2\sin B\sin C, \sin A = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C, \therefore \sin B\cos C + \cos B\sin C = 2\sin B\sin C$, 两边同除以 $\cos B\cos C$, 可得 $\tan B + \tan C = 2\tan B\tan C$.

方法一 两角和与差的正切+换元+基本不等式

$\tan A\tan B\tan C = -\tan(B+C)\tan B\tan C = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C} \cdot \tan B\tan C = \frac{2(\tan B\tan C)^2}{\tan B\tan C - 1}$, 由三角形为锐角三角形得 $\tan B > 0, \tan C > 0, \tan A = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B\tan C - 1} > 0$, 即 $\tan B\tan C - 1 > 0$. 令 $\tan B\tan C = t$

$= t (t > 0)$, 则 $\tan A\tan B\tan C = \frac{2(t+1)^2}{t} = 2\left(t + \frac{1}{t} + 2\right) \geq 8$, 当且仅当 $t = 1$, 即 $\tan B\tan C = 2$ 时取等号.

方法二 正切恒等式+基本不等式

由正切恒等式知, $\tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C = \tan A + 2\tan B\tan C \geq 2\sqrt{2\tan A\tan B\tan C}$, $\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore \tan A\tan B\tan C > 0$, 从而可得 $\tan A\tan B\tan C \geq 8$, 当且仅当 $\tan A = 2\tan B\tan C = 4$ 时取等号.

方法三 使用不等式 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 解题

因为 $\tan B\tan C = \frac{\tan B + \tan C}{2}$, $\therefore \tan A\tan B\tan C = \frac{\tan A(\tan B + \tan C)}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{2}\right)^2$, 又 $\tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C$, $\therefore \tan A\tan B\tan C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{2}\right)^2$, 可得 $\tan A\tan B\tan C \geq 8$, 当且仅

当 $\begin{cases} \tan A = \tan B + \tan C, \\ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C, \\ \tan B + \tan C = 2\tan B\tan C, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} \tan A = 4, \\ \tan B = 2 + \sqrt{2}, \text{ 或 } \\ \tan C = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \tan A = 4, \\ \tan B = 2 - \sqrt{2}, \text{ 或 } \\ \tan C = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ 时取等号,}$$

$\therefore \tan A\tan B\tan C$ 的最小值是 8.

方法四 对偶法+消去法

由题可得 $\sin B\sin C = \frac{1}{2}\sin A$ ①, 令 $\cos B\cos C =$

$m\cos A (m > 0)$ ②, ① $\div$ ② 得, $\tan B\tan C = \frac{1}{2m}\tan A$,

① - ② 得, $\cos A = \sin B\sin C - \cos B\cos C = \frac{1}{2}\sin A - m\cos A$, 整理得 $(1+m)\cos A = \frac{1}{2}\sin A$, 故

$\tan A = 2(1+m)$, 故 $\tan A\tan B\tan C = \frac{\tan^2 A}{2m} =$

$\frac{2(1+m)^2}{m} = 2\left(m + \frac{1}{m} + 2\right) \geq 8$, 当且仅当 $m = 1$, 即

$\tan A = 4, \tan B\tan C = 2$ 时等号成立.

方法拓展 1. 对于解三角形中三元变量问题, 要善于利用两角和与差的三角公式减元, 转化为二元或一元变量, 然后利用基本不等式或函数性质解决. 2. 对偶式是一种有用的代数变换技巧. 最常见的一种对偶式是 $mA + nB$ 和 $mA - nB$, 显然两式的平方和可以消去 AB 项, 仅保留平方项. 对偶式的这一特性常被用于求最值问题中. 在三角函数、根式以及复数等相关的计算求解或化简过程中, 也常常涉及这种对偶式的处理技巧. 如下题:

已知 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 解方程 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

精解: 令 $M = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x$, 构造对偶式: $N = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x$, 则 $M + N = 3$ ①, $M - N = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 2\cos x \cos 3x + 2\cos^2 3x - 1 = 2\cos 3x (\cos x + \cos 3x) - 1 = 4\cos x \cos 2x \cos 3x - 1$, $\therefore M - N = 4\cos x \cos 2x \cos 3x - 1$ ②.

由①+②得 $\cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{4}(2M - 2)$,

又 $M = 1, \therefore \cos x \cos 2x \cos 3x = 0$,

$\therefore \cos x = 0$ 或 $\cos 2x = 0$ 或 $\cos 3x = 0$,

又 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \therefore x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{\pi}{4}$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$.

9. **精解:** (1) **方法一:** $f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x =$

$$5(\sin 5x - \sin x) = 5 \times 2\cos \frac{5x+x}{2} \sin \frac{5x-x}{2} = 10\cos 3x \sin 2x, \quad (1 \text{ 分})$$

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

当 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减. (3 分)

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}. \quad (4 \text{ 分})$$

方法二: 令 $f'(x) = 5(\sin 5x - \sin x) = 0$, 则 $\sin 5x = \sin x$, (1分)

由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 得 $5x \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$,

所以 $5x = x$ 或 $5x = \pi - x$, 解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{6}$. (2分)

因为连续可导函数的最大值必在端点或者极值点处取得, 所以只需比较 $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的大小,

又 $f(0) = 4$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$, 所以 $f(x)$

在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$. (4分)

(2) 证明: **方法一:**

因为余弦函数以 2π 为周期, 所以不妨取 $a \in [0, 2\pi)$.
若 $0 \leq a \leq \pi - \theta$, 则取 $y = a + \theta$, 有 $\cos y = \cos(a + \theta) \leq \cos \theta$; (6分)

若 $\pi - \theta < a < \pi + \theta$, 则取 $y = \pi$, 有 $\cos y = -1 < \cos \theta$; (7分)

若 $\pi + \theta \leq a < 2\pi$, 则取 $y = a - \theta$, 有 $\cos y = \cos(a - \theta) < \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$. (8分)

综上, 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$. (9分)

方法二: 假设对任意 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 都有 $\cos y > \cos \theta$, (5分)

则 $y \in (-\theta + 2k\pi, \theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$,
不妨设 $a \in [0, 2\pi)$, 则 $a - \theta > -\pi$, $a + \theta < 3\pi$,
则 $[a - \theta, a + \theta] \subseteq (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta)$, $k \in \mathbf{Z}$,
故 $a = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 矛盾, (8分)
所以假设不成立, 故存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$. (9分)

方法三: $g(y) = \cos y$ 的最小正周期为 2π , 不妨设 $a \in [-\pi, \pi]$, (5分)

则 $a - \theta > -2\pi$, $a + \theta < 2\pi$, 设 $\cos t \leq \cos \theta$ ($t \in (-2\pi, 2\pi)$), 解得 $t \in [-2\pi + \theta, -\theta] \cup [\theta, 2\pi - \theta]$, 记该区间为 D_1 , 设 $D_2 = [a - \theta, a + \theta]$.

若存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$, 只需 D_1 与 D_2 有交集即可, (6分)

当 $a < 0$ 时, $a - \theta < -\theta$, $a + \theta > -2\pi + \theta$, 所以有交集;
当 $a = 0$ 时, $D_1 \cap D_2 = \{-\theta, \theta\}$;
当 $a > 0$ 时, $a + \theta > \theta$, $a - \theta < 2\pi - \theta$, 所以有交集. (8分)

综上, 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$. (9分)

(3) **方法一:** 原不等式等价于 $b \geq 5\cos x - \cos 5x + \cos 5x - \cos(5x + \varphi)$. (10分)

由(1)知, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x) \leq 3\sqrt{3}$, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 时, $f(x) < 5\cos \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} < 3\sqrt{3}$, 所以 $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) \leq 3\sqrt{3}$. (12分)

因为 $f(x)$ 为偶函数, 且 2π 为 $f(x)$ 的一个周期, 所以 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leq 3\sqrt{3}$, 所以当 $b = 3\sqrt{3}$ 时, 可取 $\varphi = 0$ 满足题意. (14分)

不妨设 $\varphi \in [0, 2\pi)$, 取 $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,

则 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) = 5\cos x - \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{5}{6}\varphi + \varphi\right) = 5\cos x - \cos\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{6}\varphi\right) = 5\cos x + \cos x = 6\cos x \geq 3\sqrt{3}$, 所以 $b \geq 3\sqrt{3}$, (17分)

所以 b 的最小值为 $3\sqrt{3}$. (17分)

方法二:

不妨设 $\varphi \in [0, 2\pi]$, (10分)

令 $g(x) = 5\cos x - \cos(5x + \varphi)$,

则 $g'(x) = 5[\sin(5x + \varphi) - \sin x] = 10\cos\left(3x + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(2x + \frac{\varphi}{2}\right)$,

所以 $g(x)$ 的极值点为 $x = -\frac{\varphi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, $-\frac{\varphi}{6} + \frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$, (13分)

结合 $g(x + \pi) = -g(x)$, 代入 $k = 0, 1, 2$, 即可得 $g(x)$ 的极值为 $\pm 4\sin \frac{\varphi}{4}$, $\pm 4\cos \frac{\varphi}{4}$, $\pm 6\sin \frac{\varphi}{6}$, $\pm 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6}\right)$, $\pm 6\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{6}\right)$,

所以 $g(x)_{\max} = \max\left\{4\sin \frac{\varphi}{4}, 4\cos \frac{\varphi}{4}, 6\sin \frac{\varphi}{6}, 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6}\right), 6\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{6}\right)\right\} \geq 6\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6}\right) \geq 3\sqrt{3}$, 当 $\varphi = 0$ 时取等号. (16分)

综上, b 的最小值为 $3\sqrt{3}$. (17分)

方法三: 由余弦函数的周期性可令 $\varphi \in [0, 2\pi)$. (10分)

① 当 $\varphi = 0$ 时, $[5\cos x - \cos(5x + \varphi)]^2 = [5\cos x - (16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x)]^2 = \frac{2^{10}}{9}(\cos^2 x)^3 \cdot \left(\frac{15}{8} - \frac{3}{2}\cos^2 x\right)^2 \leq \frac{2^{10}}{9} \cdot \left[\frac{3\cos^2 x + 2\left(\frac{15}{8} - \frac{3}{2}\cos^2 x\right)}{5}\right]^5 = 27$, (13分)

可得 $b \geq 3\sqrt{3}$, 所以 b 的最小值为 $3\sqrt{3}$. (13分)

② 当 $\varphi \in [0, 2\pi)$ 时, 取 $x = \frac{\pi - \varphi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,

则 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) = 5\cos x - \cos\left(\frac{5\pi + \varphi}{6}\right) = 6\cos x \geq 3\sqrt{3}$, 则 b 的最小值为 $3\sqrt{3}$. (16分)

综上可得, b 的最小值为 $3\sqrt{3}$. (17分)

10. 【答案】B

【精析】方法一 利用递推关系直接计算

因为 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 所以 $f(3) > f(2) + f(1) = 3$, $f(4) > f(3) + f(2) > 5$, $f(5) > f(4) + f(3) > 8$, $f(6) > 5 + 8 = 13$, $f(7) > 8 + 13 = 21$, $f(8) > 13 + 21 = 34$, $f(9) > 21 + 34 = 55$, $f(10) > 34 + 55 = 89$, $\dots$, $f(20) > 946$. 故选 B.

方法二 构造反例

可以构造反例如下: 当 $x \geq 3$ 时, $f(x) = 10^x$, 当 $x < 3$

时, $f(x)=x$, 所以选项 C 错误, 选项 D 错误. 对于选项 A 和选项 B, 可以通过比较来排除. 首先容易看出 $f(3), f(4), \dots, f(20)$ 都是正数, 如果 $f(10) > 100$, 那么 $f(11) > f(10) + f(9) > 100$, 所以 $f(12) > f(11) + f(10) > 200$, 同理可得 $f(13) > 300, f(14) > 500, f(15) > 800, f(16) > 1000$, 所以 $f(20) > 1000$, 即由 A 正确可推出 B 一定正确, 又 A, B 不可能都正确, 所以选项 A 错误, 选项 B 正确. 故选 B.

方法拓展 本题表面看是单纯的函数递推问题, 其实在递推与构造部分和斐波那契数列有关. 需要意识到, 与本题问题有关的仅有 $f(3), f(4), \dots$ 的值, 当 $x > 3$ 且 $x \notin \mathbf{N}^*$ 时, $f(x)$ 的值与本题问题毫无关系. 因此, 在递推或者构造反例时, 均可以不考虑当 $x > 3$ 且 $x \notin \mathbf{N}^*$ 时 $f(x)$ 的值.

11. **精解:** (1) 因为曲线 $y=f(x)$ 过点 $(4, 2)$, 所以 $\log_a 4 = 2$, 所以 $a^2 = 4$, 得 $a = 2$ (负值舍去).

(2 分)

因为 $f(x) = \log_2 x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在定义域上为增函数,

(4 分)

所以由 $f(2x-2) < f(x)$,

可得 $0 < 2x-2 < x$, 即 $1 < x < 2$,

(5 分)

故 $f(2x-2) < f(x)$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$.

(6 分)

(2) 因为存在 x 使得 $f(x+1), f(ax), f(x+2)$ 成等差数列, 所以关于 x 的方程 $2f(ax) = f(x+1) + f(x+2)$ 有解,

即关于 x 的方程 $2\log_a(ax) = \log_a(x+1) + \log_a(x+2)$ 有解.

(9 分)

因为 $a > 0, a \neq 1$, 所以 $x > 0$, 故关于 x 的方程 $a^2 x^2 = (x+1)(x+2)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

(10 分)

即当 $x > 0$ 时, $a^2 = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$

$2\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ 有解,

(11 分)

令 $t = \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$, 因为 $y = 2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的取值范围为 $(1, +\infty)$,

(13 分)

所以 $a^2 > 1$, 即 $a > 1$.

(14 分)

12. **精解:** (1) **思路一 求最值, 建立关于 a 的方程**

由题知 $f'(x) = e^x - a, g'(x) = a - \frac{1}{x} (x > 0)$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 没有最小值, 不符合题意.

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < \ln a$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得最小值 $f(\ln a) = a - a \ln a$;

(2 分)

令 $g'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{a}$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单

调递增,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 处取得最小值 $g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$.

(3 分)

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值, 所以 $a - a \ln a = 1 + \ln a$,

即 $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$.

(4 分)

方法一(构造函数): 令 $h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1} (x > 0)$,

则 $h'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递增,

易知 $h(1) = 0$, 所以 $a = 1$.

(5 分)

方法二(切线放缩+两边夹): 因为 $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq$

$x - 1$, 所以 $1 - \frac{1}{a} \leq \ln a \leq a - 1$,

即 $1 - \frac{1}{a} \leq 1 - \frac{2}{a+1} \leq a - 1$, 解得 $1 \leq a \leq 1$, 从而

$a = 1$.

(5 分)

思路二 公切线法

易知当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 没有最小值, 不符合题意, 故 $a > 0$.

设函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 的最小值为 t ,

则 $\forall x \in (0, +\infty), \ln x + t \leq ax \leq e^x - t$.

(1 分)

设直线 $y = ax$ 分别与曲线 $y = e^x - t$, 曲线 $y = \ln x + t$ 切于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} y_1 = ax_1, \\ y_2 = ax_2, \\ y_1 = e^{x_1} - t, \\ y_2 = \ln x_2 + t, \\ a = e^{x_1} = \frac{1}{x_2}, \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

整理得 $a\left(\ln a + \frac{1}{a}\right) = a + \ln \frac{1}{a}$, 即 $(a+1) \ln a = a -$

1 , 即 $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$.

(4 分)

以下同上.

(2) 证明: **方法一 三次构造+指数转化同构**

由(1)知, $f(x) = e^x - x, g(x) = x - \ln x, f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1$.

① 当 $b < 1$ 时, 因为 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 > b$, 所以直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 没有交点, 不符合题意.

(6 分)

② 当 $b = 1$ 时, 因为 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 = b$, 所以直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有两个交点, 不符合题意.

(7 分)

③ 当 $b > 1$ 时, 首先证明直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$

有两个交点,

即证明 $F(x)=f(x)-b$ 有两个零点.

因为 $F'(x)=f'(x)=e^x-1$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $F(-b)=e^{-b}>0, F(0)=1-b<0, F(b)=e^b-2b>0$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有且只有一个零点, 设为 x_1 , 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点, 设为 x_2 .

(8分)

然后证明直线 $y=b$ 与曲线 $y=g(x)$ 有两个交点,

即证明 $G(x)=g(x)-b$ 有两个零点.

因为 $G'(x)=g'(x)=1-\frac{1}{x}(x>0)$, 所以 $G(x)$ 在

$(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $G(e^{-b})=e^{-b}>0, G(1)=1-b<0, G(2b)=b-\ln(2b)>0$,

所以 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有且只有一个零点, 设为 x_3 , 在 $(1, +\infty)$ 上有且只有一个零点, 设为 x_4 .

接下来证明存在 b 使得 $x_2=x_3$,

因为 $F(x_2)=G(x_3)=0$,

所以 $b=e^{x_2}-x_2=x_3-\ln x_3$,

若 $x_2=x_3$, 则 $e^{x_2}-x_2=x_2-\ln x_2$,

即 $e^{x_2}-2x_2+\ln x_2=0$,

(9分)

所以只需证明 $e^x-2x+\ln x=0$ 在 $(0, 1)$ 上有解,

即 $\varphi(x)=e^x-2x+\ln x$ 在 $(0, 1)$ 上有零点.

因为 $\varphi\left(\frac{1}{e^3}\right)=e^{\frac{1}{e^3}}-\frac{2}{e^3}-3<0, \varphi(1)=e-2>0$,

所以 $\varphi(x)=e^x-2x+\ln x$ 在 $(0, 1)$ 上有零点, 设为

x_0 , 令 $x_2=x_3=x_0$, 则 $b=e^{x_0}-x_0$,

则存在直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点.

(10分)

最后证明 $x_1+x_4=2x_0$, 即从左到右的三个交点的横坐标成等差数列,

因为 $F(x_1)=F(x_2)=F(x_0)=0=G(x_3)=G(x_0)=G(x_4)$, 所以 $F(x_1)=G(x_0)=F(\ln x_0)$,

又因为 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $x_1<0, 0<x_0<1$, 即 $\ln x_0<0$, 所以 $x_1=\ln x_0$.

同理 $x_4=e^{x_0}$.

(11分)

因为 $e^{x_0}-2x_0+\ln x_0=0$,

所以 $x_1+x_4=e^{x_0}+\ln x_0=2x_0$.

综上, 存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

(12分)

方法二 构造函数+零点存在定理+数形结合

证明: 由(1)知, $f(x)=e^x-x, g(x)=x-\ln x, f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1$.

设函数 $G(x)=f(x)-g(x)=e^x+\ln x-2x$, (6分)

则 $G'(x)=e^x+\frac{1}{x}-2$.

当 $x>0$ 时, $G'(x)=e^x+\frac{1}{x}-2>1+x+\frac{1}{x}-2>0$,

所以 $G(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. (7分)

又 $G(e^{-2})=e^{e^{-2}}-2-2e^{-2}<\sqrt{e}-2<0, G(1)=e-2>0$, 所以 $G(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恰有一个零点 x_0 , 且 $x_0\in(e^{-2}, 1)$. (8分)

取 $b=e^{x_0}-x_0$, 则 $b=x_0-\ln x_0$, 由(1)知 $b>1$, 故 x_0 是函数 $y=f(x)-b$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的唯一零点.

又 $f(\ln x_0)=b$, 所以 $\ln x_0$ 是函数 $y=f(x)-b$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内的唯一零点. (9分)

同理可得 x_0 是函数 $y=g(x)-b$ 在区间 $(0, 1)$ 上的唯一零点, e^{x_0} 是函数 $y=g(x)-b$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的唯一零点. (10分)

因此, 直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 从左至右共有三个不同的交点 $(\ln x_0, b), (x_0, b), (e^{x_0}, b)$, 如图. (11分)

因为 $e^{x_0}+\ln x_0=2x_0$, 所以这三个交点的横坐标成等差数列. (12分)

方法三 同构法

证明: 由(1)可得 $f(x)=e^x-x, g(x)=x-\ln x, f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1$.

假设存在直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, (6分)

设三个不同交点的横坐标分别为 $x_1, x_0, x_2, x_1<x_0<x_2$, 则 $x_1<0<x_0<1<x_2$,

$f(x_1)=f(x_0)=g(x_0)=g(x_1)=b$, (7分)

即 $\begin{cases} e^{x_1}-x_1=b, \\ e^{x_0}-x_0=b \end{cases}$ 且 $\begin{cases} x_0-\ln x_0=b, \\ x_2-\ln x_2=b. \end{cases}$

观察 $f(x)$ 与 $g(x)$ 解析式的结构, 可得 $f(\ln x)=$

$g(x)$, 即 $\begin{cases} e^{\ln x_0}-\ln x_0=b, \\ e^{\ln x_2}-\ln x_2=b, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} f(x_1)=f(\ln x_0), \\ f(x_0)=f(\ln x_2), \end{cases}$ (9分)

由 $x_1<0, \ln x_0<0, f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 得 $x_1=\ln x_0$,

同理, $x_0=\ln x_2$, 即 $x_2=e^{x_0}$, 则 $x_1+x_2=\ln x_0+e^{x_0}$. (10分)

又因为 $f(x_0)=g(x_0)$, 所以 $e^{x_0}-x_0=x_0-\ln x_0$, 所以 $e^{x_0}+\ln x_0=2x_0$, (11分)

所以存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列. (12分)

知识本源

该题基于同底的指数函数、对数函数互为反函数,它们的图象关于直线 $y=x$ 对称,考查关于直线 $y=x$ 对称的点所隐含的数量关系,具体如下:

直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 的交点的横坐标,即方程 $e^x-x=b$ 和 $x-\ln x=b$ 的根,也就是函数 $y=e^x$ 与直线 $y=x+b$ 及函数 $y=\ln x$ 与直线 $y=x-b$ 的交点的横坐标.

如图①,当 $b=1$ 时,直线与对应曲线相切,仅有两个交点,不满足题意.

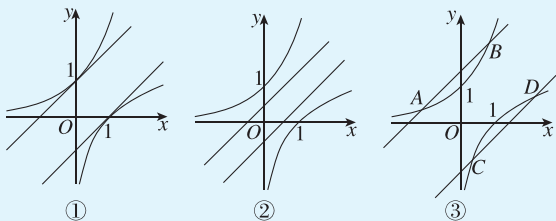
如图②,当 $b<1$ 时,直线与对应曲线无交点,也不满足题意.

如图③,当 $b>1$ 时,直线与对应曲线有四个交点,假设 $A(x_1, e^{x_1})$, $B(x_2, e^{x_2})$, $C(x_3, \ln x_3)$, $D(x_4, \ln x_4)$.

显然点 A 与点 C 、点 B 与点 D 均关于直线 $y=x$ 对称.

所以必有 $x_1+x_4=\ln x_3+e^{x_2}=x_3-b+x_2+b=x_3+x_2$, 即 $x_1+x_4=x_3+x_2$.

由题意可知,本题就是要寻找一个 b 值(客观存在),使得线段 BC 与 x 轴垂直,此时 $x_3=x_2$, 满足 $x_1+x_4=2x_2$, 从而使得 x_1, x_2, x_4 成等差数列.



13. **精解:** (1) 证明: $f'(x) = \frac{1}{x}$, 则过点 $(a_{m-1}, f(a_{m-1}))$

作函数 $f(x)$ 图象的切线的斜率为 $\frac{1}{a_{m-1}}$, (1分)

则切线方程为 $y - \ln a_{m-1} = \frac{1}{a_{m-1}}(x - a_{m-1})$, 即 $y = \frac{1}{a_{m-1}}x + \ln a_{m-1} - 1$, (2分)

令 $x=0$, 可得 $y = \ln a_{m-1} - 1$. (3分)

根据题意可知, $a_m = \ln a_{m-1} - 1$, 即得证. (4分)

(2) 先证明不等式 $\ln x \leq x-1 (x>0)$, (6分)

设 $F(x) = \ln x - x + 1 (x>0)$,

则 $F'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

易知当 $0<x<1$ 时, $F'(x)>0$, $F(x)$ 单调递增,

当 $x>1$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减, 所以 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 也是最大值, 所以 $F(x) \leq F(1)=0$, 即 $\ln x \leq x-1 (x>0)$. (8分)

结合(1)可知, $a_m = \ln a_{m-1} - 1 \leq a_{m-1} - 1 - 1 = a_{m-1} - 2$. (10分)

(3) **方法一 整体分析解题**

假设存在 k 符合题意, 即 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 依次成等差数列, 设公差为 d , 由(2)可知 $d \leq -2$,

显然, 当 $d=-2$ 时, 因为 $-2=a_2-a_1=\ln a_1-a_1-1$, 所以 $a_1=1, a_2=-1$, 则不存在 a_3 , 所以 $d<-2$.

(11分)

因为 $d=a_k-a_{k-1}=\ln a_{k-1}-a_{k-1}-1$, 所以 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ 为方程 $\ln x-x-1-d=0$ 的解,

所以函数 $h(x)=\ln x-x-1-d$ 有 $k-1$ 个零点.

(12分)

由(2)易知, $y=\ln x-x$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x) \leq h(1)=-2-d$,

所以 $h(1)=-2-d>0$, 又 $h(e^d)=-1-e^d<0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一零点 x_1 .

(14分)

$h(-2d)=\ln(-2d)+d-1$, 令 $t=-2d$, $\varphi(t)=\ln t - \frac{t}{2} - 1, t>4$, 则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t} - \frac{1}{2}<0$,

所以 $\varphi(t)<\varphi(4)=\ln 4-3<0$, 所以 $h(-2d)<0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点 x_2 .

(16分)

综上, $h(x)=\ln x-x-1-d$ 对任意 $d<-2$ 都存在两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 \in (0,1), x_2 \in (1,+\infty)$, 所以存在 $k=3$, 使得 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 依次成等差数列.

(18分)

方法二 消元, 构造函数零点

假设存在 k 符合题意, 即 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 依次成等差数列, 所以 $a_k+a_{k-2}=2a_{k-1}$, (11分)

因为 $a_k=\ln a_{k-1}-1, a_{k-1}=\ln a_{k-2}-1$,

所以 $e^{a_{k-1}+1}+\ln a_{k-1}-1=2a_{k-1}$,

因此 a_{k-1} 为方程 $e^{x+1}+\ln x-1=2x$ 的解,

即函数 $G(x)=e^{x+1}+\ln x-1-2x$ 的零点. (14分)

因为 $G'(x)=e^{x+1}+\frac{1}{x}-2>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

所以 $G(x)$ 为增函数,

又因为 $G(\frac{1}{e^{10}})<e^2-11<0, G(1)=e^2-3>0$,

所以 $G(x)$ 在 $(\frac{1}{e^{10}}, 1)$ 上存在唯一零点 t , 即在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 t , (16分)

所以当 $a_2=t$ 时, a_1, a_2, a_3 依次成等差数列.

又 $a_3=\ln a_2-1<0$, 所以停止操作.

综上, 存在 $k=3$, 使得 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 依次成等差数列. (18分)

14. **【答案】** 4

【精析】方法一: 由已知可设 $P(x, x+\frac{4}{x}), x>0$, 所

以点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离 $d=\frac{|x+x+\frac{4}{x}|}{\sqrt{2}}=$

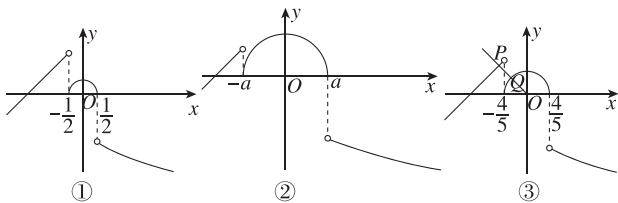
$\frac{2x+\frac{4}{x}}{\sqrt{2}} \geq \frac{2\sqrt{2x \cdot \frac{4}{x}}}{\sqrt{2}}=4$, 当且仅当 $2x=\frac{4}{x}$, 即 $x=$

$\sqrt{2}$ 时取等号, 故点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值为 4.

方法二:当直线 $x+y+C=0$ 与曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 相切于点 P 时,点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离最小. 由 $y'=1-\frac{4}{x^2}=-1$,得 $x=\sqrt{2}$ (负值舍去),此时 $y=3\sqrt{2}$,即切点 $P(\sqrt{2},3\sqrt{2})$,点 $P(\sqrt{2},3\sqrt{2})$ 到直线 $x+y=0$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{2}+3\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$.

15. 【答案】(2)(3)

【精析】依题意知, $a>0$. 对于(1),取 $a=\frac{1}{2}$,则 $f(x)$ 的图象如图①所示,由图可知,当 $x\in(a-1,+\infty)$,即 $x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$ 时, $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},0)$ 上单调递增,故(1)错误. 对于(2),当 $a\geq 1$ 时,若 $x<-a$,则 $f(x)=x+2<-a+2\leq 1$;当 $-a\leq x\leq a$ 时, $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ 的最大值为 a ;当 $x>a$ 时, $f(x)=-\sqrt{x}-1<-\sqrt{a}-1\leq -2$. 综上,当 $a\geq 1$ 时, $f(x)$ 存在最大值,最大值为 a ,故(2)正确. 对于(3),作出 $f(x)$ 的大致图象,如图②所示,由图可知,在 $x_1=a, x_2>a$ 且 x_2 接近于 $x=a$ 处, $M(x_1, f(x_1)) (x_1\leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2>a)$ 之间的距离最小,当 $x_1=a$ 时, $f(x_1)=0$,当 $x_2>a$ 且 x_2 接近于 $x=a$ 时, $f(x_2)<-\sqrt{a}-1$,此时, $|MN|>f(x_1)-f(x_2)>\sqrt{a}+1>1$,故(3)正确. 对于(4),假设 $a=\frac{4}{5}$,则 $f(x)$ 的图象如图③所示,过点 $O(0,0)$ 作直线 $y=x+2$ 的垂线 l ,结合 $f(x)$ 的图象可知,要使 $|PQ|$ 取得最小值,则点 P 为垂线 l 与 $f(x)=x+2(x<-\frac{4}{5})$ 的图象的交点,点 Q 为垂线 l 与 $f(x)=\sqrt{\frac{16}{25}-x^2}(-\frac{4}{5}\leq x\leq \frac{4}{5})$ 的图象的交点,则 $|PQ|$ 的最小值为点 O 到 $f(x)=x+2(x<-\frac{4}{5})$ 的图象的距离减去半圆的半径 a ,因为直线 $y=x+2$ 的斜率为 1,所以 $k_{OP}=-1$,故直线 OP 的方程为 $y=-x$. 由 $\begin{cases} y=-x, \\ y=x+2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=1, \end{cases}$ 则 $P(-1,1)$,显然 $P(-1,1)$ 在 $f(x)=x+2(x<-\frac{4}{5})$ 的图象上,满足 $|PQ|$ 取得最小值,即当 $a=\frac{4}{5}$ 时, $|PQ|$ 也存在最小值,故 a 的取值范围不仅仅是 $(0, \frac{1}{2}]$,故(4)错误. 故正确结论的序号是 (2)(3).



16. 【答案】 $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$

【精析】思路一 以数构形—转化为两个函数图象的交点

方法一(动双曲线与定折线的交点):易知 $a\neq 0$. 函数 $f(x)=2\sqrt{x^2-ax}-|ax-2|+1$ 恰有一个零点,令

$t=ax$,则可转化为关于 t 的方程 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$

$2|-1$ 有一个解,即函数 $y=2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}$ 与 $y=|t-2|-1$

$2|-1$ 的图象有一个交点. 对于函数 $y=2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}$,

等号两边同时平方后得 $y^2=4(\frac{t^2}{a^2}-t) (y\geq 0)$,整理

得 $\frac{(t-\frac{a^2}{2})^2}{\frac{a^4}{4}}-\frac{y^2}{a^2}=1 (y\geq 0)$,故 $y=2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}$ 的图象

是由双曲线 $\frac{t^2}{\frac{a^4}{4}}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 向右平移 $\frac{a^2}{2}$ 个单位长度得到

的图形的上半部分,渐近线方程为 $y=\pm\frac{2}{a}(t-\frac{a^2}{2})$,

图象与 t 轴的交点为 $(0,0)$ 和 $(a^2,0)$. 令 $|t-2|-1=0$,得 $t=1$ 或 $t=3$,所以 $y=|t-2|-1$ 的图象与 t 轴交于两点 $(1,0), (3,0)$.

(1)当 $0<a^2\leq 1$,即 $-1\leq a<0$ 或 $0<a\leq 1$ 时,

$|\frac{2}{a}|>1$,如图①,此时 $y=2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}$ 与 $y=|t-2|-1$ 的图象有两个交点,不满足题意.

(2)当 $1<a^2<3$,即 $-\sqrt{3}<a<-1$ 或 $1<a<\sqrt{3}$ 时,

$|\frac{2}{a}|>1$,如图②,此时 $y=2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}$ 与 $y=|t-2|-1$ 的图象恰有一个交点,满足题意.

(3)当 $3\leq a^2<4$,即 $-2\leq a\leq -\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leq a<2$ 时,

$|\frac{2}{a}|>1$,如图③,此时 $y=2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}$ 与 $y=|t-2|-1$ 的图象有两个交点,不符合题意.

(4)当 $a^2=4$,即 $a=\pm 2$ 时, $|\frac{2}{a}|=1$,如图④,此时

$y=2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}$ 与 $y=|t-2|-1$ 的图象有两个交点,不符合题意.

(5)当 $a^2>4$,即 $a<-2$ 或 $a>2$ 时, $|\frac{2}{a}|<1$,此时可

转化为求关于 t 的方程 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$ 的解的个数.

当 $t\leq 0$ 时, $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$ 可化简为

$2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=1-t$,平方整理为 $(\frac{4}{a^2}-1)t^2-2t-1=$

0, 即 $\left[\left(\frac{2}{a}-1\right)t-1\right] \cdot \left[\left(\frac{2}{a}+1\right)t+1\right]=0$, 所以方程有两个解 $t_1=\frac{a}{2-a}, t_2=\frac{-a}{2+a}$, 当 $a^2>4$ 时, $t_1<0$

且 $t_2<0$, 所以当 $t\leq 0$ 时, $y=2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}$ 与 $y=|t-2|-1$ 的图象有两个交点, 所以当 $t\in\mathbf{R}$ 时, 两函数图象至少有两个交点(如图⑤), 不符合题意.

综上所述, a 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, -1)\cup(1, \sqrt{3})$.

方法二(参变分离转化为定抛物线与动直线的交点): 易知 $a\neq 0$, 令 $t=ax$, 则条件可转化为关于 t 的方程

$2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$ 有一个解, 观察发现式子左侧只有一处含有参数 a , 所以考虑参变分离, 因为 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$ 有解, 所以 $t\geq 3$ 或 $t\leq 1$. 将方

程 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$ 等号两边同时平方得 $4\frac{t^2}{a^2}-4t=t^2+5-4t-2|t-2|$, 整理得 $4\frac{t^2}{a^2}=\begin{cases} t^2-2t+9, & t\geq 3, \\ t^2+2t+1, & t\leq 1, \end{cases}$ 当 $t=0$ 时, $4\frac{t^2}{a^2}\neq t^2+2t+1$, 所以 $t=0$ 不是方程的根, 所以 $\frac{4}{a^2}=$

$\begin{cases} 1-\frac{2}{t}+\frac{9}{t^2}, & t\geq 3, \\ 1+\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}, & t\leq 1 \text{ 且 } t\neq 0 \end{cases}$ 有一个解. 令 $m=\frac{1}{t}$, 则

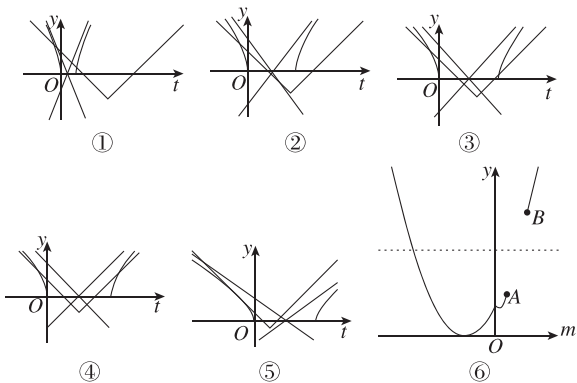
$\frac{4}{a^2}=\begin{cases} 1-2m+9m^2, & 0<m\leq \frac{1}{3}, \\ 1+2m+m^2, & m\geq 1 \text{ 或 } m<0 \end{cases}$ 有一个解, 即函数

$y=\frac{4}{a^2}$ 与 $y=\begin{cases} 1-2m+9m^2, & 0<m\leq \frac{1}{3}, \\ 1+2m+m^2, & m\geq 1 \text{ 或 } m<0 \end{cases}$ 的图象有

一个交点. 作出 $y=\begin{cases} 1-2m+9m^2, & 0<m\leq \frac{1}{3}, \\ 1+2m+m^2, & m\geq 1 \text{ 或 } m<0 \end{cases}$ 的图

象如图⑥, 其中 $A\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), B(1, 4)$, 所以 $\frac{4}{3}<\frac{4}{a^2}<$

4, 所以 $1<a^2<3$, 所以 a 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, -1)\cup(1, \sqrt{3})$.



思路二 以数解数—转化为方程的解+平方去根号后分类去绝对值

易知 $a\neq 0$, 令 $t=ax$, 则条件可转化为 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=$

$|t-2|-1$ 恰有一个解, 因为 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$

有解, 所以 $t\geq 3$ 或 $t\leq 1$. 将方程 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-$

$2|-1$ 等号两边同时平方得 $4\frac{t^2}{a^2}-4t=t^2+5-4t-2|t-2|$.

(1) 当 $t\leq 1$ 时, 方程可化为 $4\left(\frac{1}{a^2}t^2-t\right)=(1-t)^2$, 即

$\left(\frac{4}{a^2}-1\right)t^2-2t-1=0$, 可因式分解为 $\left[\left(\frac{2}{a}-1\right)t-1\right]\left[\left(\frac{2}{a}+1\right)t+1\right]=0$.

当 $a=\pm 2$ 时, 解得 $t=-\frac{1}{2}<0$, 满足题意.

当 $a\neq \pm 2$ 时, 解得 $t_1=\frac{a}{2-a}, t_2=\frac{a}{-2-a}$, 若方程有唯一的解, 则 t_1, t_2 有一个大于 1, 另一个小于等于 1,

则 $\begin{cases} \frac{a}{2-a}>1, \\ \frac{a}{-2-a}\leq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{a}{2-a}\leq 1, \\ \frac{a}{-2-a}>1 \end{cases}$ 解得 $1<a<2$ 或 $-2<$

$a<-1$. 所以当 $t\leq 1$ 时, $1<a\leq 2$ 或 $-2\leq a<-1$.

(2) 当 $t\geq 3$ 时, 方程可化为 $4\left(\frac{1}{a^2}t^2-t\right)=(t-3)^2$, 即

$\left(\frac{4}{a^2}-1\right)t^2+2t-9=0$, 设 $g(t)=\left(\frac{4}{a^2}-1\right)t^2+2t-9=0(t\geq 3)$, 由(1)可知, 方程 $g(t)=0$ 无实数解.

当 $a=\pm 2$ 时, 由 $g(t)=0$ 得 $t=\frac{9}{2}$, 所以 $a=2$ 不满足题意;

当 $a\neq \pm 2$ 时, 注意到二次函数 $g(t)$ 的图象开口向上且对称轴在 y 轴左侧, 所以 $g(3)>0$, 解得 $a^2<3$, 结合(1)得 $1<a<\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}<a<-1$.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\sqrt{3}, -1)\cup(1, \sqrt{3})$.

【命题追踪】 高考评价强调融会贯通, 增强同一主题必修模块与选择性必修模块间的联系, 增强不同主题之间的联系, 在知识网络的交汇点设计题目, 促进各分支知识本身的纵向延伸, 同时增强知识分支间的横向拓展. 本专题统计了近十年高考题中, 与函数、导数结合考查的题目, 发现近年跨模块考查的题目增多, 强调用函数思想、转化思想解决不同知识模块的问题.

专题十三 数列与其他模块交汇

1. 【答案】B

【精析】 依题意, 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=a_1+(n-1)d$.

考点 21 1. 1 121 2. -63 3. C 6. $-\frac{1}{n}$ P199-201

考点 22 1. 7 4. $\frac{2n}{n+1}$ P201-203

专题六 2-3 DB 4. ACD 5. 48 384 6. 5 240 $\left(3 - \frac{n+3}{2^n}\right)$ 7-8 CB 9. 64 10. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 11. ①③④ P203-207

考点 23 1-5 DDDAC 6-7 BC 8. 112 9. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ 10. 28 11. $\sqrt{3}$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 14-18 BBBBC 19. AC P207-212
20. 24π 21. 1 22. 39π 23. 23 $\frac{115}{2}$ 24. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 25-27 CCD 28. CD 29. 118.8 30. 60

考点 24 1-5 BCCAD 6. B 7. 若 $m//\alpha, l \perp \alpha$, 则 $l \perp m$ (答案不唯一) 8-9 DA 10. BC 11. BC 12. BC P212-216

考点 25 1. D 3-6 BBBCD 7. ABD 14. A P216-232

考点 26 1. $\sqrt{2}$ P232-234

专题七 1-3 ABA 4. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ 5. D 6. 2 7. ABD 8. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ 9. 12 10. C 11. $\frac{5}{2}$ 12. $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$ P238-241

专题八 1. A 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 3. ①②③⑤ 4. B 5. BD 6. $\frac{2}{5}$ P241-243

1-5 ADBCC
6. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ (或 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 或 $x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}y = 0$ 或 $x^2 + y^2 - \frac{16}{5}x - 2y - \frac{16}{5} = 0$) P243-248
7-10 DBCB 11. BC 12. ABD 13. 2 14. 2 15. $2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$ (填一个即可)
16. $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$ 17-18 BD 19. ACD 20. BCD 21. 0 22. 6 23-24 CA

考点 29 1-5 ACBAB 6-10 ACABD 11-12 BA 13. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 14. 8 15. $x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{2} = 0$ P248-252
16. 13

考点 30 1. B 2. ACD 3-7 BBBCA 8-10 ADA 11. $\frac{\sqrt{66}}{6}$ 12. $\frac{3}{2}$ 13. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 14-17 DDAD P252-257
18. AC 19. ACD 20. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 21. 2 (答案不唯一, 满足 $1 < e \leq \sqrt{5}$ 即可)

1-4 DBDB 5. 6 6. $\frac{9}{4}$ 7-9 BCC 10. AC 11. ABD 12. ABD 13. ACD 14. ACD P257-261
15. BCD 16. 6 17. $x = -\frac{3}{2}$ 18. $\frac{4}{5}$ 19. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

考点 32 1-5 BCCDB 6-8 BCC 9. CD 10. BD 13-14 AC P274-277

考点 33 1. B 2. 288 3-6 CBCB 7. 1080 8. 16 9. 64 10-12 CCC 13. 660 14. 36 15. 329 P277-280
16. 1260 17. 24 112

考点 34 1-4 AADB 5. -20 6. 8 7. 10 8. 10 9. 1 15 10. 5 11. C 12. 45 13. C 14. -28 P280-282
15. 8 -2 16. 5 10 17. 3 18. 49

1-5 AACDC 6-7 CD 8. $\frac{3}{10}$ 9. $\frac{3}{7}$ 10. $\frac{2}{3}$ 11. $\frac{7}{15}$ 12. $\frac{1}{2}$ 13-15 BBD 16. $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ P282-288
17. 0.18 19. A 20. $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$ 21. $\frac{8}{27}$ $\frac{37}{64}$ 22. $\frac{17}{20}$ 23. $\frac{1}{20}$ $\frac{3}{5}$

考点 36 1. A 2. $\frac{61}{25}$ 3. $\frac{16}{35}$ $\frac{12}{7}$ 4. 1 $\frac{8}{9}$ 8-9 AB 10. $\frac{3}{2}$ 11. 0.6 3. 2 13-14 BD 15. BC P288-291

专题十二 1. D 2. BC 3. $2x - y = 0$ 6. C 7. ②③ 8. 8 10. B 14. 4 15. (2)(3) P293-302
16. $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$

专题十三 1-3 BBB 4. ①③④ 9. A 11. $[2, +\infty)$ 13. C P302-307

专题十四 1. C 2. $\frac{1}{2}$ 3. 4 $\sqrt{15}$ 5. ②③ P307-309

专题十五 1-4 CAAB 5. 5 6. 4 $2\sqrt{5}$ 7. $(1, \sqrt{5})$ 8. $\frac{3}{2}b - \frac{1}{2}a$ $\frac{\pi}{6}$ 9-10 DD 12-14 CDC P309-314

答案速查

考点 1	1-5 CBAAC 6-10 ACBCD 11-15 BABBB 16-20 ACADB 21-25 ABBDD 26-30 DCDA 31-35 BDAAD 36. A 37. $\{-1, 0\}$ 38-39 CA	P127-128
考点 2	1-5 ACBAC 6-10 BCBBC 11-15 CBCCC 16-18 BBB	P128-130
考点 3	1. C 2. (1, 3) 3. $\{x -1 < x < 3\}$ 4. (1, 3) 5. -4 6-10 CACCB 11. ABD 12. BD 13. 4 14. $2\sqrt{2}$	P130-133
考点 4	1-4 DADB 5. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ 6. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right)$ 7-8 DD 9. $\sqrt{3}$ 10. 2 11. $\frac{37}{28}$ 12. $3+\sqrt{3}$ 13. $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$	P133-135
考点 5	1-5 CDDDB 6. $[1, +\infty)$ 7. 0(答案不唯一) 1 8-12 BBCBD 13. 0 14. 2 15. 1 16. -1 17. $-\frac{1}{2}$ $\ln 2$ 18-22 DAACB 23-26 ADDB 27. ABD 28. ABC 29. ②③	P135-140
考点 6	1-3 CBC 4. 1 5. 64 6-10 CDDCB 11-14 ABBD 15. $f(x)=x^2$ (答案不唯一)	P140-142
考点 7	1-4 DCAD 5. $y=5x+2$ 6. 4 7. $a < -4$ 或 $a > 0$ 8. $y=\frac{x}{e}$ $y=-\frac{x}{e}$ 9. (0, 1) 10. $\ln 2$	P142-143
考点 8	1. C 2. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ 4-6 BDB 7. BCD 8. 1 9. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 13-14 BD 15. AC 16. ACD 17. AD 18. -4 19-22 CABA	P144-150
考点 9	1-5 ABBAD 6-10 ADDDC 11. B	P150-151
考点 10	1-4 CDBD 5. ACD	P151-152
考点 11	1. B 3-4 DC 5. (4, $+\infty$) 6. ①②④ 7. (-2, 1) 8. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 9. $[10, +\infty)$	P152-155
考点 12	1-3 DCB 4. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 5. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\frac{4}{5}$ 6. $-\frac{1}{2}$ 7. $\frac{5}{12}\pi$ (答案不唯一) 8. $\frac{\pi}{2}$ (答案不唯一) $\frac{\pi}{6}$ (答案不唯一)	P165-167
考点 13	1-5 DADBA 6-9 CBDC 10. 1 $-\sqrt{2}$ 11. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 12. $-\frac{3}{4}$ 13. π	P167-170
考点 14	1-4 CCDB 5. $-\sqrt{3}$ 6. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 7-11 BBBCA 12. $\frac{9\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ (答案不唯一) 13-17 CCAAD 18. D 19. $\frac{3\pi}{2}$ 1 20. 2 22-24 ACC 25. BC 26. AD 27. 3 28. [2, 3) 29. 2	P170-176
考点 15	1-4 ADBC 5. $\sqrt{3}-1$ 6. $\frac{3\sqrt{15}}{16}$ 7. $2\sqrt{2}$ 15-16 CB 17. ABC	P176-183
专题五	1. 2 2. $2\sqrt{13}$ $\frac{2\sqrt{39}}{13}$	P183-186
考点 16	1-3 ABA 4. $\frac{8}{5}$ 5-8 DBDB 9. $-\frac{3}{4}$ 10. 11 11. $-\frac{9}{2}$ 12. $-\frac{10}{3}$ 13. $\frac{3}{5}$ 14. 0 3 15. $\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b$ -15 16-20 BCDD 21-22 DD 23. $\sqrt{2}$ 24. $\sqrt{3}$ 25. $\sqrt[4]{5}$ 26. 2 [1, 3]	P187-191
考点 17	1-2 AD 3. AC 4. $\frac{4}{3}$ $-\frac{5}{18}$ 5. $[12+2\sqrt{2}, 16]$	P191-193
考点 18	1-4 CBBA 5. ACD 6. $2-2i$ 7-11 AABCC 12-14 DBD 15. $\sqrt{10}$ 16-20 ACDA 21-25 CACDD 26-30 CCCCB 31. $8+6i$ 32. 2 33. $4+i$	P193-195
考点 19	1-3 DCC 4. 12 5. 2 6. 24 7. 95 8. -2 9(答案不唯一, 满足 $8 \leq a_1 \leq 10$ 即可) 9. 98 12-14 CBB	P195-198
考点 20	1-3 DCC 4. AD 5. 189 6. 2 7. $-\frac{1}{2}$ 9. ACD 10. C 11. -2	P198-199

